# MARINI GHETALDI PATRITII RAGVSINI

# APOLLONIVS REDIVIVVS

SEV

*RESTITVTAE APOLLONII PERGAEI*

*De Inclinationibus Geometriæ.*

LIBER SECVNDVS.




VENETIIS, MDCXIII.

APVD BARETIVM BARETIVM.

*Superiorum permiſſu.*

Digitized by Google

# SANCTISSIMO
## D. N.
# PAVLO V.
## PONTIFICI
## MAXIMO.

## Marinus Ghetaldus.

CONSTANS in Remplicam noſtram, & continuus Sanctitatis tuæ fauor, ac ſingularis in me gratiæ tuæ nunquam intermoriturum beneficium, animum erexit; vt paruo huic operi grande patrocinium, & obſcuro Auctori claritudinem, ex maieſtate tua, conciliare auderem. Quin & libellus ipſe audet, nec exiguitate ſua territus veretur tantæ maieſtati ſiſti, fretus peruetuſto, ac celebri nomine Apollonij Per-



Digitized by Google

gæi cognomento magni Geometræ, quem rediuiuum exhibet: Et vaticinatur ſibi Sanctitatem tuam ex eo nonnihil velut in tranſitu delibaturam; cum totius regendæ Eccleſiæ graui pondere defeſſus ad aliquam intēti animi relaxationem etiam hoc ſtudiorum genus in ſecretum tuum admiſeris. Iampridem animi voto Sanctitatis tuæ Beatiſſima veſtigia exoſculatus ſum, non modo dignitatem tuam in te; ſed te in dignitate tua veneratus. Nunc meæ deuotionis donarium hoc, ſupplex faſtigio tuo deſtinaui; digniori monumento, ſi ſuppetet, adoraturus.

Raguſæ Kal. Aug. Anno tui Pontificatus nono.

# AD LECTOREM.

SEPTENNIVM iam ferme eſt, Amice Lector, ex quo Apollonium Pergæum è tenebrarum orco erutum, luci & Mundo rediuiuum ex parte reſtitui, ex parte inquam, quia, cum duo fuerint Libri ab eo de Inclinationibus conſcripti, quinque Problemata vniuerſalia continentes, primus tantum, cui quatuor priora inerant, à me tunc editus fuit, ſecundo, qui quintum complectebatur, ob eas, quas in fine illius opuſculi attuli, rationes, in opportunam magis occaſionem dilato. Exciderat mihi ſane, fateor, ab eo tempore omnis de quinti Problematis ſolutione memoria, dum me ipſum priuatis publiciſque negotijs difficulter exſoluo. Verum menſibus præteritis, dum cœpta commentaria reuoluo & reuiſo, venit in manum prima huius Problematis olim ordita delineatio. Perculit illico animum publica fides, ſtatimque pollicitis eſſe ſtandum mecum ipſe decreui, pudore motus ſimul ac pietate: illo, ne forte quiſpiam excuſationes prioris libelli, non ex neceſſitate proueniſſe, ſed quod operi impar eſſem interpretaretur: hac, ne virum tam excellentem in ipſo quaſi vitæ limine

mine ſine vita relinquerem. Quamuis autem in hoc Problemate plures ſint caſus, pluresq; in eorũ determinationibus & conſtructionibus difficultates occurrant, ad quas tollẽdas, determinationesq; & conſtructiones ordinandas & demonſtrãdas, præter iudicium & ſcientiam, ſummum otium deſideraretur, quo me nequaquam frui, ijs, qui me meæq; vitæ conditionem nouerunt, exploratum eſt. Tantum tamen apud me pudoris & pietatis ſtimuli valuerũt, vt reſolutionis greſſibus inſiſtens ex iſto me Labyrintho paucorum dierum ſpatio facile expedierim

*Errabunda regens tenui veſtigia filo.*

Iam perfecta & exſcripta omnia erant, Typographîque operam ſolam expectabant. Cum ecce vir nobilis & diſertus Georgius Strachanus Scotus, ſuſcepta in Orientem peregrinatione, Raguſam diuertit, & præter alia humanitatis officia libellum mihi exhibuit, quem ab Auctore Alexandro Anderſono, conciue & amico ſuo chariſſimo, ad me miſſum legendum commendauit. Legi libenter & relegi, non tradentis & mittentis ſolum, ſed etiam argumenti cauſa mihi admodum gratum. Ex quo quidem integro feliciſſimum Anderſoni ingenium, & in arte Analytica ſolertiam & ſubtilitatem perſpexi, & laudo. Mouerat quidem animum, fateor, dum ſub titulo libri, & in præfatione ad Lectorem profitetur perfici, per rationem ſui primi Lemmatis, Aequationem ad tertium rationis gradum aſcendentem, in qua data magnitudo homogeneæ ignotæ ſub altero coefficiente noto comparatur: cum tamen nullam habere viam fateretur, qua Aequationem ſimplicem eius gradus abſolueret, præter duarum mediarum inuentionem. Verum Lemmate attentius perpenſo, in morem præſtigij luſiſſe virum doctum animaduerti, & pro ſolido

no-

nobis planum per aſcenſum ſuppoſuiſſe. Qua luſus ſpecie elegantius vſus fuit, dum pro determinatione Problematis in caſibus omnibus difficilioribus, Aequationis ſuæ determinationem poſt ſuam analyſim ſubſtituit, vt arduam inuentionem maximæ & minimæ interceptarum euitaret; quamuis ſine ipſa inuentione Problema determinari non poſſit. Quæ ſane & alia vt eruditioni & famæ viri nihil detrahunt, ita eum dexteritate & ingenij acumine præditum indicant: quem ego amo & maximi facio.

Cæterum, Amice Lector, ſi meis votis & tuo fortaſſe deſiderio tardius ſatisfeci, id te rogatum maximè velim, vt æqui bonique conſulas, & conſideres, quam multa ſint & varia, quæ humanorum conſiliorum, actuumque euentus impedire, & animos etiam conſtantes aliò flectere & obliquare poſſint. Vale.

Raguſæ, Kal. Aug. Anno M DC XIII.

Digitized by Google

Ad Virum Clariſſimum

# MARINVM GHETALDVM

## PAT. RAGVSINVM

ob Apollonium Rediuiuum

Epigramma.

*QVI vitam miſero dat, vita dignus habetor.*
*Hac lex, hæc veterum conſuetudo vetus;*
*Quique viro illuſtri vitam ſeruarit, honore*
*Illuſtri in terris viuere dignus erit.*
*Tu illuſtri ſimul, & miſero, vitamque dediſti*
*Pergæo, atque decus, docte Ghetalde, ſeni:*
*Vita igitur dignus vel Neſtoris, & Geometræ*
*Nomine tu Magni dignus, vt ille fuit.*

*Georgius Strachanus*
*Mernienſis Scotus Raguſæ.*

# MARINI GHETALDI APOLLONIVS REDIVIVVS

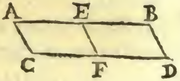
SEV

*RESTITVTAE APOLLONII PERGAEI*
*De Inclinationibus Geometriæ*

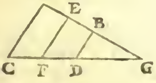
## LIBER SECVNDVS.

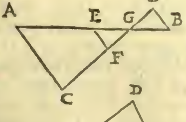
## Lemma I.

SINT duæ rectæ lineæ AB CD, quarum AB ſecetur bifariam in E, & à punctis AEB ducantur tres parallelæ AC EF BD ſecantes rectam CD in punctis C F D. Dico æquales eſſe CF FD.

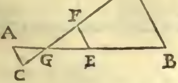


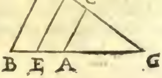

Si enim AB CD ſint parallelæ, parallelogramma erunt AF FB, ac proindè AE çqualis erit CF, & EB çqualis FD, æqualia * enim ſunt parallelogrammorum latera ex aduerſo, ſed ponuntur æquales AE EB, ergo çquales erũt & CF FD. *34. Primi.*




Si vero non ſint parallelæ AB CD, conuenient inter ſe. conueniant in G, ergo ſimilia erunt triangula GAC GEF, ob parallelas enim EF AC angulus GAC çqualis eſt angulo GEF, & angulus GCA,

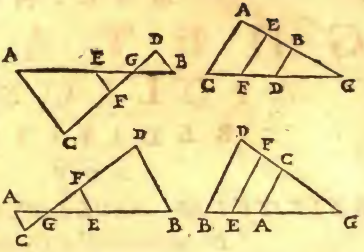



A æqua-

Digitized by Google

æqualis angulo G F E, quare vt A G ad G E, ita erit C G ad G F, & exiſtente puncto E inter puncta A G, erit diuidendo, & conuertendo, exiſtente vero G inter A E, erit componendo, & conuertendo, at exiſtēte A inter E G, erit conuertendo, & per conuerſionem rationis, vt G E ad E A, ita G F ad F C.



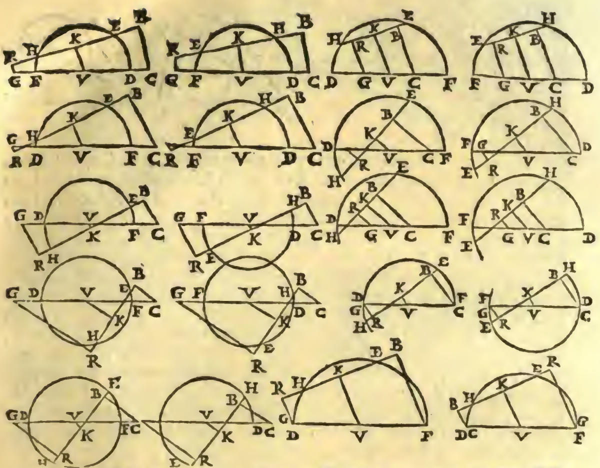

Et quoniam propter parallelas D B E F angulus G D B æqualis eſt angulo G F E, & angulus G B D angulo G E F, ſimilia erunt triangula G D B G F E, vt igitur B G ad G E, ita erit D G ad G F, & exiſtente G inter E B, erit componendo, exiſtente vero E inter G B, erit diuidendo, at exiſtente B inter E G, erit conuertendo, & per conuerſionem rationis, & rurſus conuertendo, vt B E ad G E, ita D F ad G F, ſed vt G E ad E A, ita eſt G F ad F C, vt demonſtrauimus, ergo ex æquali erit vt B E ad E A, ita D F ad F C, ſed B E æqualis eſt E A, ergo & D F æqualis erit F C quod erat oſtendendum.

# Lemma II.

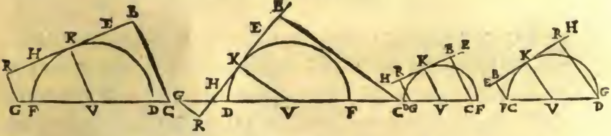
SI in diametro circuli, etiam producta, ſumantur duo puncta à centro æquediſtantia, & ab ijs ducantur ad rectam lineam in circulum cadentem duæ rectæ perpendiculares. Segmenta cadentis inter circumferentiam, & perpendiculares interiecta æqualia erunt.

Sumantur in diametro circuli D F, duo puncta C G à centro quod ſit V æque diſtantia, & ab ijs ad rectam E H cadentem in circulum ducantur duæ perpendiculares C B G R, ipſaque E H, ſecet circulum in punctis E H. Dico E B H R æquales eſſe. Ducatur enim V K perpendicularis ad E H, erunt igitur tres parallelæ B C K V G R atque ſunt æquales G V V C, ergo * æquales erunt, & K R,
Lem. 1. K B, ſed * æquales quoque ſunt K H K E, ergo per æqualium æqua-
3 Tertij. libus ſubductionem, vel additionem, erunt æquales & E B H R.

Sed



Sed recta E H tangat circulum in K. Dico æquales eſſe KB, KR



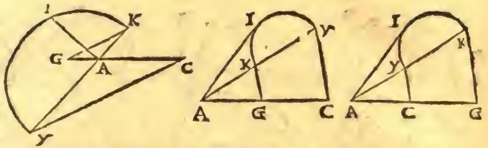
iungatur enim K V, ea perpendicularis *, erit ipſi E K, vnde tres pa- 18. Tertij
rallelæ erunt G R V K C B, atque ſunt æquales G V V C, ergo
æquales * erunt & KB K R, quare conſtat propoſitum. Lem. 1.

# Lemma III.

DAto quadrato, aliud quadratum in data ratione inuenire.



Digitized by Google




Sit datum quadratū cuius latus AK, & data ratio AG ad AC. Oportet inuenire aliud quadratum, vt quadratum AK ad quadratum inuentum habeat rationem vt AG ad AC. Ponantur in directum AG AC, & ex puncto A ducatur AK ita vt cum AC conſtituat angulum quemcumque, & iungatur GK, eique parallela ducatur CY occurrens KA productæ in Y. in recta autem KY deſcribatur ſemicirculus YIK, & ex A ipſi KY ducatur perpendicularis AI vſque ad circumferentiam, ſi punctum A ſit in diametro KY, ſi vero ſit extra diametrum, ducatur AI contingens ſemicirculum in I. Quoniam igitur parallelæ ſunt GK CY, erunt anguli AGK ACY æquales, & æquales quoque anguli AKG AYC; vnde ſimilia triangula AGK ACY. vt igitur AG ad AC ita erit AK ad AY, Sed vt AK ad AY ita eſt quadratum AK ad quadratum AI, ſunt enim tres proportionales AK AI AY, & eſt vt prima * ad tertiam. ita quadratum primæ ad quadratum ſecundæ, ergo vt AG ad AC ita erit quadratum AK ad quadratum AI. factum eſt igitur quod oportebat.

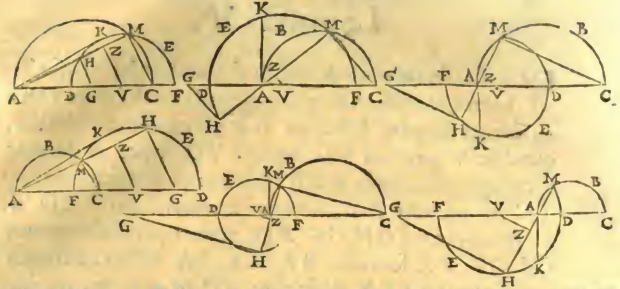
Cor. 2. Pr. 20. Sexti.

# Lemma IV.

SINT duo ſemicirculi ABC DEF in directum baſes habentes AC DF, qui ſe inuicem ſecent, etiam ſi compleantur in M, & iungatur AM, ducatur autem AK contingens ſemicirculum DEF in K ſi punctum A ſit extra baſim ſemicirculi DF, ſi verò ſit in ipſa baſe ducatur AK perpendicularis ipſi DF ſecans ſemicirculum DEF in K, & exiſtente V centro circuli DEF, fiat VG æqualis VC. Dico vt AG ad AC ita eſſe quadratum AK ad quadratum AM.

Conectatur enim MC, & ſemicirculus DEF vel circulus completus ſecet AM etiam productam in H, & conectatur quoque

GH,




GH, & ducatur VZ perpendicularis ad MH. Aequales * igitur erunt MZ ZH, & ipſa VZ parallela erit ipſi MC, quia & MC perpendicularis eſt ad MH, rectus eſt enim angulus AMC in ſemicirculo; Quare ob eas parallelas & anguli ACM AVZ æquales erunt; Et propterea ſimilia triangula AMC AZV. vt igitur AV ad AC ita erit, AZ ad AM. Et exiſtente puncto V inter AC, erit conuertendo & diuidendo, exiſtente vero A inter CV, erit conuertendo & componendo, at exiſtente C inter AV, erit per conuerſionem rationis & conuertendo vt VC hoc eſt VG ad AV ita ZM, ſeu ZH ad AZ, & rurſus exiſtente V inter AG, erit componendo, exiſtente vero A inter VG, erit diuidendo, at exiſtente G inter AV, erit conuertendo & per conuerſionem rationis & rurſus conuertendo vt AG ad AV ita AH ad AZ, & permutando vt AG ad AH ita erit AV ad AZ. Duo igitur triangula AHG AZV circa æquales angulos qui ſunt ad A proportionalia habent latera, ergo * ſunt æquiangula, quare angulus AHG æqualis eſt angulo AZV, & angulus AGH æqualis angulo AVZ, ſed angulis AZV AVZ æquales ſunt anguli AMC, ACM vtrique vterque propter parallelas ZV MC, ergo anguli AHG AGH æquales ſunt angulis AMC ACM, ac proinde ſimilia triangula AHG AMC. Vt igitur AG ad AC ita erit AH ad AM. Sed vt AH ad AM ita * eſt rectangulum HAM ad quadratum AM, eandem enim habent altitudinem AM; ergo vt AG ad AC, ita erit rectangulum HAM, hoc * eſt quadratum AH ad quadratum AM, quod erat oſtendendum.

3. Tertij. 6. Sexti. 1. Sexti. 35 & 36 Tertij.

Lemma

Digitized by Google

# Lemma V.

SInt duo ſemicirculi A B C D E F in directum baſes habentes, & recta A K contingens ſemicirculum D E F in K ſecet alterum A B C in T, & ex centro circuli D E F, quod ſit V ponatur V G æqualis V C, & per A ducatur vtcunque recta linea A E B H ſecans circumferentias K F T C in punctis E B, Circumferentiam vero K D in H, & iungantur G H G K K D, quibus parallelę agantur C S C Y Y X ſecantes B A T A F A etiam continuatas in punctis S Y X, & fiat * vt A G ad A G, Ita quadratum A K ad quadratum A I. Dico vt A G ad A C, ita eſſe F C ad C X, & ita E B ad B S, & ita quoque K T ad T Y, adque vnumquodque rectangulorum Y A K E A S F A X quadrato A I æquale eſſe.

Lem. 3.

Quoniam enim æquales ſunt V G V C, & æquales quoque V D V F, erunt per æqualium æqualibus additionem, vel ſubductionem æquales & D G F C. & quoniam propter parallelas K D X Y æquales ſunt anguli G D K C X Y, & propter parallelas G K C Y æquales anguli D G K X C Y ſimilia erunt triangula D G K X C Y, vt igitur G K ad G D, ita erit C Y ad C X, & permutando vt G K ad C Y, ita G D, hoc eſt F C ad C X.

Aequè quoniã parallelę ſunt G K C Y erit angulus A G K æqualis angulo A C Y, & angulus A K G æqualis angulo A Y C, vnde ſimilia * erunt triangula A G K A C Y & propter ſimilitudinem erit, vt A G ad G K, ita A C ad C Y, & permutando vt A G * ad A C, ita G K ad C Y, ſed vt G K ad C Y oſtenſa eſt F C ad C X, ergo vt A G ad A C, ita erit F C ad C X, quod eſto primum.

A
B

Deinde iungatur B C, & ei parallela agatur G R, æqualis igitur erit angulus A R G angulo A B C, & ideo rectus, quia & ipſe A B C in ſemicirculo rectus eſt, vnde H R * E B æquales erunt.

Lem. 1.

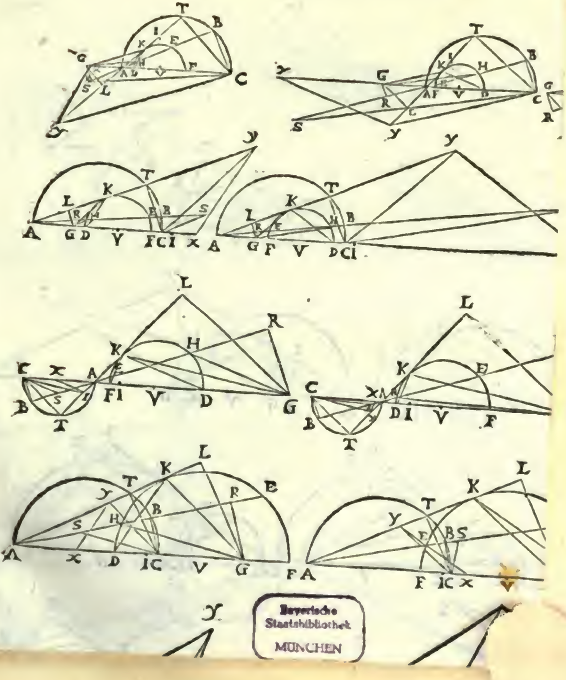
Et quoniam parallelę ſunt G H C S, erit angulus G H R æqualis angulo C S B, eſt autem & angulus H R G æqualis angulo S B C, rectus nempe recto, ergo ſimilia erunt triangula H R G S B C, quare vt G H ad H R, ita erit C S ad S B, & permutando vt G H ad C S, ita H R, hoc eſt E B ad B S.

Similiter

Similiter quoniam parallelæ ſunt GH CS anguli AGH ACS, erunt æquales, & æquales quoque anguli AHG ASC, & ideo ſimili … vt igitur AG ad GH, ita erit C

APOLLON

*Figuræ Lemmatis V. colloca*



Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

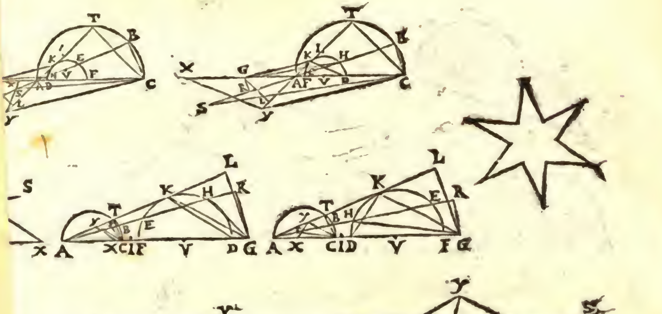
Digitized by Google

# Lemma V.

SInt duo ſemicirculi A B C D E F in ... na-

NII REDIVIVI

*ndæ inter ſextam & ſeptimam paginam.*



Similiter quoniam parallelæ ſunt GH CS anguli AGH ACS, erunt æquales, & æquales quoque anguli AHG ASC, & ideo ſimilia * triangula AGH ACS, vt igitur AG ad GH, ita erit AC ad CS, & permutando, vt AG ad AC, ita GH ad CS, ſed vt GH ad CS, ita eſt EB ad BS, vt demonſtrauimus: Ergo vt AG ad AC, ita erit EB ad BS, quod eſto ſecundum. C

Iam conectatur TC, & ei parallela agatur GL, ergo angulus KLG æqualis erit angulo ATC, ſed rectus eſt ATC in ſemicirculo, ergo & KLG rectus erit, & ideo æquales * LK KT. *Lem. 2.*

Et quoniam ſimilia ſunt triangula KLG YTC, ſunt enim ęquales anguli GKL CYT ob parallelas GK CY, & æquales anguli KLG YTC, quia recti, Erit vt GK ad KL, ita CY ad YT, & permutando, vt GK ad CY, ita KL hoc eſt KT ad TY, ſed & AG ad AC eſt vt GK ad CY, vt demonſtrauimus ad ſignum B, Ergo vt AG ad AC, ita erit KT ad TY, atque id eſto tertium.

Et quoniam ſimilia ſunt triangula AGK ACY, vt ad ſignum A demonſtrauimus, erit AG ad AK, vt AC ad AY, & permutando AG ad AC erit vt AK ad AY, ſed vt AK ad AY, ita * eſt quadratum AK ad rectangulum YAK, ſunt enim eiuſdem altitudinis AK, ergo vt AG ad AC ita erit quadratum AK ad rectangulum YAK, ſed vt AG ad AC, ita ponitur quadratum AK ad quadratum AI, ergo rectangulum YAK quadrato AI æquale erit, quod eſto quartum. *1. Sexti.*

Aequæ quoniam ſimilia ſunt triangula AGH ACS, vt ad ſignum C demonſtrauimus, erit vt AG ad AH, ita AC, ad AS, & permutando, vt AG ad AC, ita AH ad AS, ſed vt AH ad AS, ita * eſt rectangulum EAH ad rectangulum EAS eandem enim EA altitudinem habent, vt igitur AG ad AC, ita erit rectangulum EAH hoc eſt * quadratum AK ad rectangulum EAS, ſed vt AG ad AC, ita ponitur quadratum AK ad quadratum AI, ergo rectangulum EAS æquale erit quadrato AI, quod eſto quintum. *1. Sexti.* *36. Tertij.*

Poſtremo quoniam parallelæ ſunt KD XY erunt anguli ADK AXY æquales, & æquales anguli AKD AYX, & ideo ſimilia triangula ADK AXY, vt igitur AD ad AK, ita erit AX ad AY, ſed vt AD ad AK, ita eſt * quoque AK ad AF, rectangulū enim FAD æquatur * quadrato AK, ergo vt AX ad AY, ita erit AK ad AF: Vnde rectangulum FAX ſub extremis * æquale erit rectangulo YAK ſub medijs, ſed rectangulum YAK æquale eſt quadrato AI, vt quarto loco demonſtrauimus: Ergo & rectangulum FAX eidem quadrato AI æquale erit, quod poſtremo loco erat demonſtrandum. *17. Sexti* *36. Tertij.* *16. Sexti.*

## COROLLARIVM.

COnſtat igitur rectangula YAK EAS FAX æqualia eſſe, etenim vnumquodque eorum oſtenſum eſt æquale quadrato AI.

*In ſemicirculis ſeinuicem ſecantibus facile rectam AI inueniemus, ſi enim à puncto A ad punctum ſectionis, quod ſit M ducatur recta linea AM, eique ponatur æqualis AI, ea*
Lem. 4. *erit de qua quæritur, eſt enim * vt AG ad AC ita quadratum AK ad quadratum AM.*

*Similiter & in ſemicirculis ſeinuicem tangentibus facilimè inueniemus rectam AI, ea enim æqualis eſt rectæ AC, nam*
36. Tertij. *cum rectangulum GAC æquale * ſit quadrato AK, proportio-*
17. Sexti. *nales * erunt AG AK AC. Vt igitur * AG ad AC, prima*
Cor. 2. pr. 20. Sexti *videlicet ad tertiam, ita erit quadratum ſecundæ AK ad quadratum AC tertiæ.*

# Lemma VI.

SInt duo ſemicirculi ABC DEF in directum baſes habentes, & recta AK perpendicularis ad AC ſecet ſemicirculum DEF in K, & per A ducatur vtcunque recta linea ABE ſecans circumferẽtias ABC KF in punctis BE, & compleatur circulus DEFH, quem EA continuata ſecet in H, & ex eius centro, quod ſit V ponatur VG æqualis VC, & conectãtur GH GK KD, quibus parallelę agantur CS CY YX ſecantes EA AK FA etiam
Lem. 3. productas in punctis SYX, & fiat * vt AG ad AC ita quadratum Ak ad quadratum AI. Dico vt AG ad AC ita eſſe FC ad CX, & ita EB ad BS, & ita quoque AK

ad

**ad AY. Et inſuper vnumquodque rectangulorum YAK EAS FAX quadrato AI æquale eſſe.**

Quoniam enim æquales ſunt VG VC, & æquales quoque VD VF, erunt æquales & DG FC. Et quoniam æquales ſunt anguli YCX KGD ob parallelas YC KG, & æquales quoque anguli YXC KDG ob parallelas YX KD, ſimilia erunt triangula KGD YCX. Vt igitur KG ad GD ita erit YC ad CX, & permutando vt KG ad YC, ita GD hoc eſt FC ad CX.

Similiter quoniam propter parallelas YC KG, æquales ſunt anguli AGK ACY, & æquales AKG AYC ſimilia erunt triangula * AGK ACY; quare vt AG ad GK, ita erit AC ad CY, & permutando vt AG ad AC, ita GK ad CY, ſed vt GK ad CY, ita eſt FC ad CX, vt demonſtrauimus, ergo vt AG ad AC, ita etit FC ad CX, quod eſt primum. A

Iam conectatur BC, cui parallela agatur GR. Angulus igitur ARG æqualis erit angulo ABC, ſed rectus eſt ABC in ſemicirculo, ergo & ARG rectus erit. Quare æquales * erunt HR EB. *Lem.1.*

Et quoniam parallelæ ſunt GH CS, & parallelæ RG BC erit angulus GHR æqualis angulo CSB, & angulus HRG æqualis angulo SBC, vnde ſimilia erunt triangula HRG SBC, & propter ſimilitudinem erit, vt GH ad HR, ita CS ad SB, & permutando vt GH ad CS ita HR, hoc eſt EB ad BS.

Similiter quoniam parallelæ ſunt GH CS anguli AGH ACS, erunt æquales, & æquales quoque anguli AHG ASC, ac proinde ſimilia * triangula AGH ACS, ergo vt AG ad GH, ita erit AC ad CS, & permutando vt AG ad AC, ita GH ad CS, ſed vt GH ad CS ita nunc oſtenſa eſt EB ad BS, vt igitur AG ad AC, ita erit EB ad BS, quod eſt ſecundum. B

Et quoniam ad ſignum A demonſtrauimus ſimilia eſſe triangula AGK ACY, erit vt AG ad AK, ita AC ad AY, & permutando, vt AG ad AC, ita erit AK ad AY, atque id eſt tertium.

Deinde quoniam quadratum AK, & rectangulum YAK eandem habent altitudinem AK, erit vt * AK ad AY, ita quadratum AK ad rectangulum YAK ſed AK ad AY eſt vt AG ad AC, vt tertio loco demonſtrauimus, ergo vt AG ad AC, ita erit quadratum AK ad rectangulum YAK, ſed vt AG ad AC, ita ponitur quadratum AK ad quadradum AI, ergo rectangulum YAK quadrato AI æquale erit, quod eſt quartum. *1. Sexti.*

Eadem ratione. Quoniam rectangula EAH EAS eandem habent altitudinem EA erit vt * AH ad AS, ita rectangulum EAH ad rectangulum EAS, ſed AH ad AS eſt vt AG ad AC propter triangulorum AGH ACS ſimilitudinem quam ad ſignum B demonſtrauimus: Ergo vt AG ad AC, ita erit rectangulum EAH, hoc *1. Sexti.*

B eſt

Digitized by Google

35 Tertij. *eſt quadratum AK ad rectangulum EAS, ſed idem quadratum AK ponitur ſe habere ad quadratum AI, vt AG ad AC, ergo rectangulum EAS æquale erit quadrato AI, quod eſt quintum.

Poſtremo, quoniam parallelæ ſunt KD YX, erit angulus ADK æqualis angulo AXY, & angulus AKD angulo AYX, & ideo ſimilia triangula ADK AXY. Vt igitur AD ad AK, ita erit AX ad AY, ſed vt AD ad AK ita *eſt quoque AK ad AF, rectangulum enim DAF *æquale eſt quadrato AK, ergo vt AX ad AY, ita erit AK ad AF, quare rectangulum FAX ſub extremis *æquale erit rectangulo YAK ſub medijs, ſed rectangulum YAK oſtenſum eſt quarto loco æquale quadrato AI, ergo, & rectangulum FAX eidem quadrato AI æquale erit, quod ſexto & vltimo loco erat demonſtrandum.

(Margin: 17. Sexti; 35. Tertij; 16. Sexti.)

## COROLLARIVM.

MAnifeſtum eſt igitur rectangula YAK EAS FAX æqualia eſſe, oſtenſum enim eſt vnumquodque eorum æquari quadrato AI.

*In ſemicirculis ſeinuicem ſecantibus recta AI æqualis eſt rectæ lineæ quæ à puncto A ad punctum ſectionis quod ſit M ducitur, demonſtratum *eſt enim vt AG ad AC ita eſſe quadratum AK ad quadratum AM.* (Lem. 4.)

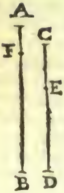
*In ſemicirculis verò ſeinuicem tangentibus recta AI æqualis eſt rectæ AC, nam cum ſint tres rectæ lineæ proportionales AG AK AC eſt vt AG *ad AC prima videlicet ad tertiam, ita quadratum AK ſecundæ ad quadratum AC tertiæ. Itaque in ſemicirculis ſeinuicem ſecantibus, aut tangentibus facilimè inuenietur recta AI.* (Cor. 2. tr. 20. Sexti.)

# Lemma VII.

DIfferentia maximæ & minimæ quatuor magnitudinum maior eſt quàm reliquarum differentia.

Sint

Sint quatuor magnitudines AB CD CE AF, ſitque maxima AB, minima AF, differentia igitur maximæ & minimæ erit FB, differentia vero reliquarum CD CE erit ED. Dico ipſam FB maiorem eſſe quam ED. Quoniam enim AB maior eſt quam CD, AF vero minor quam CE, erit reliqua FB maior quam ED reliqua, à maiore enim AB ablata eſt minor quantitas quam à minore CD. Quare conſtat propoſitum.



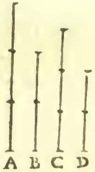

# Lemma VIII.

SI quatuor magnitudinum proportionalium vna extremarum aut mediarum fuerit maxima. Altera minima erit.

Sint quatuor magnitudines proportionales AB CD, ſitque A ad B, vt C ad D, & ſit vna extremarum, vtpote A, omnium maxima. Dico alteram extremam D minimam eſſe. Quoniam enim maxima ponitur A prima, ea eſt maior quam C tertia, ergo & ſecunda B maior eſt quam D quarta. Et quoniam eſt vt A ad B ita C ad D, A vero maior quam B, erit & C maior quam D. Sic igitur ipſa D ominum eſt minima.




Sed ſit maxima vna mediarum, nempe B. Dico alteram mediam C minimam eſſe. Quoniam enim vt A ad B, minor nempe ad maiorem, ita eſt C ad D, erit & C minor quam D. Et quoniam eſt vt A ad B, ita C ad D, erit conuertendo vt B ad A ita D ad C, eſt autem B maior quàm D, cum ſit omnium maxima, ergo & A quam C maior erit. Minima eſt igitur omnium C. Quare conſtat propoſitum.




# Lemma IX.

SI compoſita ex extremis quatuor magnitudinum proportionalium fuerit maior quàm compoſita ex medijs. Altera extremarum maxima erit. Altera minima.

Sint quatuor magnitudines proportionales A B C D, & ſit vt



Digitized by Google

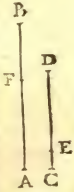
A ad B ità C ad D, ſit autem compoſita ex extremis A D maior quam compoſita ex medijs B C. Dico alteram ipſarum A D maximam eſſe, alteram minimam. Si enim fieri poteſt neutra ipſarum A D ſit maxima, ergo vna mediarum erit maxima. Et
Lem. 8. conſequenter * altera minima: vnde compoſita ex
25. Quinti. maxima * & minima, hoc eſt ex medijs maior erit quàm compoſita ex reliquis, hoc eſt ex extremis, quod eſt abſurdum, ponitur enim compoſita ex extremis maior quàm compoſita ex medijs. Cum igitur neutra mediarum ſit maxima, erit maxima vna
Lem 8. extremarum, & per conſequens * altera minima.




# Lemma X.

SImiliter ſi differentia extremarum quatuor magnitudinum proportionalium fuerit maior quàm differentia mediarum. Altera extremarum maxima, Altera minima erit.

Sint quatuor magnitudines proportionales AB CD DE BF, & AF differentia videlicet extremarum AB BF ſit maior quam CE differentia mediarum CD DE. Dico AB maximam eſſe proportionalium, FB minimam. Si enim fieri poteſt non ſit maxima AB. Ergo CD maxima erit, & conſequenter * DE minima. Itaque DE minor
Lem 8. erit quam BF. Si igitur à maiori auferatur minor quantitas quam à minore, reliqua maioris maior erit quam reliqua minoris; auferatur ergo DE a CD, & FD ab AB, reliqua CE maior erit quam reliqua AF, quod eſt abſurdum, Ponitur enim AF maior quam CE. Non eſt igitur
Lem 8. maxima CD, ergo AB maxima erit, & per conſequens * BF minima, quod erat oſtendendum.




# Lemma XI.

SI compoſita ex extremis quatuor magnitudinum proportionalium fuerit æqualis compoſitę ex medijs. Maior extremarum æqualis erit maiori mediarum, Minor minori.

Sint

Digitized by Google



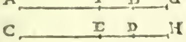

Sint quatuor magnitudines proportionales AB CD DE BF, ſitque AF compoſita ex extremis æqualis CE compoſitæ ex medijs, & ſit AB maior extrema, DE maior media. Dico AB DE æquales eſſe, itemque æquales BF CD. Si enim non ſunt æquales erit altera maior, altera minor. Sit primum AB ſi fieri poteſt maior quam DE, ergo multo maior erit quam CD, ſed AB ponitur quoque maior quam BF; Ergo ipſa AB omnium erit maxima, & conſequenter * BF minima; vnde AF *Lem. 8.* compoſita ex maxima & minima maior erit quam CE compoſita ex reliquis, quod eſt abſurdum, ponuntur enim æquales AF CE, non igitur AB maior eſt quam DE.

Sed ſit AB ſi fieri poteſt minor quam DE, ergo BF multo minor erit, ſed & CD ponitur minor quam DE, ergo DE omnium erit maxima CD vero * minima, atque adeo CE compoſita ex maxima. *Lem. 8.* & minima maior erit quam AF compoſita ex reliquis, quod itidem eſt abſurdum, Ponuntur enim æquales AF CE. Non igitur AB minor eſt quam DE. Cum itaque AB non ſit maior, neque minor quam DE, erit ipſi æqualis, & per conſequens CD æqualis quoque BF, eſt enim vt AB ad CD ita DE ad BF, & eſt AB prima æqualis DE tertiæ vt demonſtrauimus, ergo & ſecunda CD æqualis eſt BF quartæ. Quare conſtat propoſitum.

# Lemma. XII.

Similiter ſi differentia extremarum quatuor magnitudinum proportionalium fuerit æqualis differentiæ mediarum. Maior extrema maiori mediæ æqualis erit, Minor autem minori.

Sint quatuor magnitudines proportionales AB CD DE BF. Sit autem AF differentia extremarum æqualis CE differentiæ mediarum. Dico AB CD æquales eſſe, & æquales quoque DE BF. Producantur, enim AB CD vt BG ſit æqualis ED, & DH æqualis FB. Quoniam igitur BG æqualis eſt ED, & FB æqualis DH, erit FG æqualis EH, ſed & AF æqualis eſt CE, ergo tota AG toti CH æqualis erit.




Et quoniam eſt vt AB ad CD ita DE ad BF, erit permutando vt AB ad ED, hoc eſt ad BG ita CD ad BF, hoc eſt ad DH, & componendo vt AG ad BG, ita erit CH ad DH, ſed AG oſten-

oſtenſa eſt æqualis CH, ergo & BG æqualis erit DH, hoc eſt E D æqualis erit ipſi FB, minor videlicet mediarum minori extremarum. Atque ſi æqualibus FB ED addantur æquales AF CE, erit & AB æqualis CD, hoc eſt maior extremarum maiori mediarum. Maior igitur extrema maiori mediæ æqualis eſt, minor autem minori, quod erat oſtendendum.

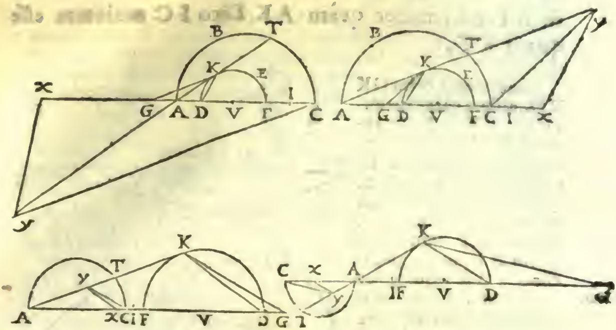
# Lemma XIII.

SInt duo ſemicirculi ABC DEF in directum baſes habentes, & recta A K contingens ſemicirculum D E F in K ſecet ipſum A B C in T, & ex centro circuli D E F,
*Lem.3.* quod ſit V ponatur V G æqualis V C, & fiat * vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I. Sit autem A F maior quam A K, & A I non minor quam A F. Vel ſit A F minor quàm A K, & A I non maior quàm A F. Dico K T maiorem eſſe quam F C.

Iungantur enim G K K D, eiſque parallelæ agantur C Y Y X ſecantes K A F A continuatas in punctis Y X, & ſit primum A F maior quã A K, & A I non minor quàm A F, ergo neque A X minor erit quàm A F, alioquin rectangulum F A X minus eſſet qua-
*Lem.5.* drato A I, quod fieri non poteſt, eſt enim * æquale. Cum igitur A F maior ſit quàm A K, & A X non minor quàm A F, erit & ipſa A X maior quàm A K. Eadem ratione, quoniam A K minor eſt quàm A F, & per conſequens minor quàm A I, erit A Y maior quàm A K, alioquin ſequeretur quod rectangulum Y A K minus
*Lem.5.* eſſet quadrato A I, quod fieri non poteſt, oſtenſum * enim eſt æquale. Cum igitur A Y maior ſit quàm A K, ſimiliter & vtraque ipſarum A F A X maior quàm A K, erit ipſa A K minima qua-
*Lem 8.* tuor proportionalium A K A F A X A Y. Vnde A Y * maxima,
*16 Sexti.* (conſtat quidem eas proportionales * eſſe, quia æqualia * ſunt re-
*Coro.* ctangula Y A K F A X) quare Y K maior erit quàm X F, com-
*Lem.5.* poſita enim ex maxima, & minima maior * eſt quàm compoſita ex
*25. Quinti.* reliquis, ſimiliter & differentia maximæ & minimæ * maior quàm
*Lem 7.* differentia reliquarum.

Deinde ſit A F minor quàm A K, & A I non maior quàm A F, ergo neque A X maior erit quàm A F, alioquin rectangulum F A X
*Lem 5.* maius eſſet quadrato AI, quod fieri non poteſt, eſt enim * æquale.

Cum




Cum itaque A F minor ſit quàm A K, & A X non maior quàm A F, erit & ipſa A X minor quàm A K. Similiter quoniam A K maior eſt quàm A F, & ideo maior quàm A I, erit A Y minor quàm A K, alioquin rectangulum Y A K maius eſſet quadrato A I, quod fieri non * poteſt. Cum igtur A Y minor ſit quam A K, *Lem.5.* ſimiliter & vtraque ipſarum A F A X minor, vt demonſtrauimus, erit A K maxima quatuor proportionalium A K A F A X A Y, & per conſequens A Y minima, (ſunt quidem proportionales * *16.Sexti.* A K A F A X A Y, propter quod æqualia * ſunt rectangula Y A K *Corol.* F A X,) ſed compoſita ex maxima, & minima quatuor proportiona- *Lem.5.* lium maior * eſt quàm compoſita ex reliquis, ſimiliter & differentia *25.Quinti.* maximæ, & minimæ maior * quàm differentia reliquarum. Ergo Y K maior erit quam X F, Quod & ſuperiori caſu demonſtrauimus. *Lem.7.*

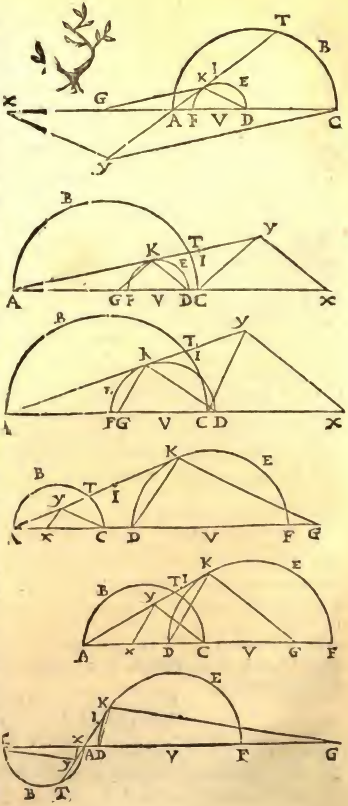
Quoniam igitur vtroque caſu eſt, vt A G ad A C, ita * K T ad *Lem.5.* T Y, & ita F C * ad C X, erit K T ad T Y vt F C ad C X, & exiſtente puncto K inter puncta Y T, erit conuertendo & diuidendo, exiſtente vero T inter Y K, erit conuertendo & componendo, at exiſtente Y inter K T, erit per conuerſionem rationis, & conuertendo, vt Y K ad K T ita X F ad F C, ſed Y K oſtenſa eſt maior quàm X F, ergo & K T quàm F C maior erit, quod erat oſtendendum.

## Lemma XIV.

ISdem poſitis. Sit autem A K maior quam A F, & A I non minor quam A K. Vel ſit A K minor quam A F,

& A I

& A I non maior quàm A K. Dico F C maiorem eſſe quam K T.



Conectantur enim G K K D, eiſque parallelæ ducantur C Y Y X ſecantes A K F A etiam continuatas in punctis Y X, & ſit primum A K maior quàm A F, & A I non minor quàm A K, ergo neque A Y minor erit quàm A K, rectangulum enim Y A K æquale * eſt quadrato A I, ſed A K maior eſt quam A F, ergo & A Y quàm A F maior erit. Et quoniam A I ponitur non minor quàm A K, ea maior erit quàm A F, & A X multo maior, nam rectangulum F A X æquale * eſt quadrato A I. Cum igitur vnaquæque ipſarum A X A K A Y maior ſit quàm A F, ipſa A F minima erit, ſed ſunt proportionales * A F A K A Y A X, rectangulum enim F A X æquale * eſt rectangulo Y A K, Ergo A X altera nempe extremarum * maxima erit; quare X F maior erit quàm Y K, compoſita enim ex maxima, & minima maior * eſt quàm compoſita ex reliquis, ſimiliter, & differentia maximæ & minimæ maior * quàm reliquarum differentia.

*Lem. 5.* (at "quadrato A I"); *Lem. 5.* (at "F A X æquale"); *16. Sexti.* (at "les * A F A K A Y A X"); *Corol. Lem. 5. Lem. 8.* (at "æquale * eſt rectangulo", "Y A K", "nempe extremarum"); *25. Quinti.* (at "& minima maior"); *Lem. 7.* (at "maior * quàm reliquarum")

Idem

Idem demonſtrabimus ſi AK minor ſit quàm AF & AI non maior quàm AK, nam cum AI non ſit maior quàm AK, neque AY maior erit, alioquin rectangulum YAK maius eſſet quadrato AI, quod fieri non poteſt, eſt enim * æquale, ſed AK minor eſt quàm AF, ergo & AY minor erit. Et quoniam AI ponitur non maior quàm AK, & AK minor quàm AF, erit & AI minor quàm AF, & per conſequens AX multo minor, rectangulum enim FAX æquale * eſt quadrato AI. Cum igitur ſingulæ AX AY AK oſtenſæ ſint minores quàm AF, ipſa AF maxima erit; Vnde AX * minima, ſunt enim quatuor proportionales * AF AK AY AX, quoniam æqualia * ſunt rectangula FAX YAK, ergo XF maior * erit quam YK, quod etiam demonſtrauimus & ſupra.

*Lem. 5.* *Lem. 5.* *Lem 8.* *16. Sexti. Corol.* *Lem. 5.* *25. Quinti.*

Vtroque igitur caſu, quoniam eſt vt AG ad AC ita FC * ad CX, & ita * KT ad TY, erit FC ad CX vt KT ad TY, & exiſtente F inter XC erit conuertendo & diuidendo, exiſtente vero C inter FX, erit conuertendo & componendo, at exiſtente X inter FC, erit per conuerſionem rationis & conuertendo vt XF ad FC ità YK ad KT, ſed XF oſtenſa eſt maior quàm YK, ergo & FC maior erit quàm KT, quod erat oſtendendum.

*& Le 7. Lem. 5.*

# Lemma XV.

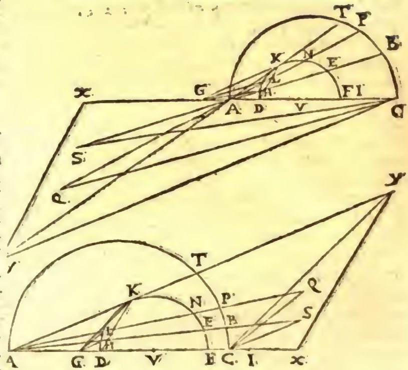
SInt duo ſemicirculi ABC DEF in directum baſes habentes & recta AK contingens ſemicirculum DEF in K ſecet ipſum ABC in T, & ex centro circuli DEF, quod ſit V ponatur VG æqualis VC, & * fiat vt AG ad AC ita quadratum AK ad quadratum AI. Sit autem AI vel non minor maiore rectarum AF AK, vel non maior minore. Dico maiorem rectarum KT FC maximam eſſe omnium quæ per A ductæ inter circumferentias KF TC interijciuntur, minorem vero minimam. Aliarum autem propinquiorem maximæ, remotiore maiorem eſſe.

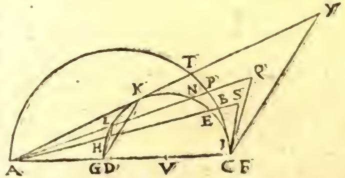
*Lem. 3. In ſemicirculis autem ſe inuicẽ tãgentib. in quib. punctũ F idẽ eſt quod punctũ C, ſufficit oſtendere KT maximam eſſe, eique propinquiorẽ remotiore maiorem eſſe.*

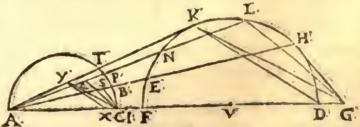
Iungantur enim GK KD, eiſque parallelæ agantur CY YX ſecantes KA FA continuatas in punctis YX. Et ſit primum cadente AF in concauam circumferentiam FK recta AI non minor ma-

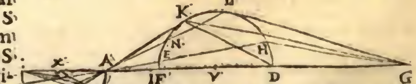
C iore

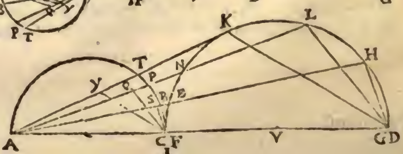
iore rectarũ AF AK. Vel cadente AF in conuexam circumferentiam FK ſit AI nõ maior minore rectarum AF AK. Ergo primo caſu AF
*8. Tertij.* *maior erit quam AK, vnde AI non minor quam AF ponitur enim AI non minor maiore rectarum AF AK. Secundo ca-
*8. Tertij.* ſu AF minor * erit quàm AK, & AI non maior quàm AF ex poſitione. Itaque vtroque ca-
*Lem. 13.* ſu KT * maior erit quam FC. Oſtendẽdum eſt igitur KT maximam eſſe, FC minimã, aliarum autẽ propinquiorem ipſi KT maiorem eſſe remotiore.











Ducatur enim per A vtcunq; recta linea AEB ſecans circumferentias KF TC in punctis EB, circũferentiã vero KD in H; & conectatur GH, cui parallela ducatur CS ſecans BA etiam continuatam in S. Rectangulum igi-
*Coroll. Lem. 9.* tur YAK * æquale erit rectangulo EAS;

EAS, quare vt AK ad AE * ita erit AS ad AY. Cadente qui- 16.Sexti
dem AF in concauam circumferentiam FK ſic argumentor, ſed
AK * minor eſt quam AE, ergo & AS minor erit quàm AY. Et 8.Tertij.
quoniam ponitur AI nō minor quàm AF, ea maior erit quàm AK,
& conſequenter maior quàm AY, rectangulum enim YAK æquale
* eſt quadrato AI. Cum igitur AI minor ſit quàm AY, erit & Lem.5.
AF minor, & AE multo minor, & per conſequens minor, & AK.
Cum igitur vna quæque rectarum AK AE AS minor ſit quàm AY,
erit AY maxima, & conſequenter * AK minima, ſunt enim qua- Lem.8.
tuor proportionales AK AE AS AY vt demonſtrauimus, vnde
YK maior erit quàm SE, compoſita enim ex maxima, & minima
maior * eſt quàm compoſita ex reliquis, ſimiliter differētia inter ma- 25.Quinti.
ximam & minimam maior * quam differentia inter reliquas. Lem.7.

Cadente vero AF in conuexam circumferentiam FK argumen-
tor hoc modo, ſed AK maior * eſt quàm AE, ergo & * AS ma- 8.Tertij.
ior erit quàm AY. & quoniam AI ponitur non maior quàm AF, 14.Quinti.
ea minor erit quàm AK, & per conſequens maior quàm AY re-
ctangulum enim YAK æquale * eſt quadrato AI. Cum igitur AI Lem.5.
maior ſit quàm AY, erit maior & AF, atq; AE multo maior, & per
conſequens maior quoque & AK. Sic igitur quatuor proportiona-
lium AK AE AS AY minima erit AY, * maxima AK, vnde YK Lem.8.
maior * erit quam SE vt demonſtrauimus & in ſuperiori caſu. 25.Quinti.

Sed vtroque caſu, quoniam eſt vt AG ad AC ita * KT ad TY, vel Le.7.
& * ita EB ad BS, erit KT ad TY vt EB ad BS, & exiſtente Lem.5.
puncto K inter YT, erit conuertendo, & diuidendo; exiſtente ve-
ro T inter YK, erit conuertendo, & componendo; at exiſtente Y
inter KT, erit per conuerſionem rationis, & conuertendo vt YK
ad KT ità SE ad EB, ſed YK oſtenſa eſt maior quàm SE, ergo
& KT maior erit quàm EB. Et ſic demonſtrabitur omnibus alijs
maior. Maxima eſt igitur omnium KT.

Similiter quoniam æqualia * ſunt rectangula EAS FAX, erit EA Corol.
ad AF vt AX ad AS. Cadente quidem AF in concauam cir- Lem 5.
cumferentiam FK, hac ratione argumentor, Sed AE * minor eſt 8.Tertij.
quàm AF, ergo & AX minor erit quàm AS, Et quoniam AI
ponitur non minor quàm AF, ea maior erit quàm AE, minor au-
tem quàm AS, rectangulum enim EAS æquatur * quadrato Lem.5.
AI, ergo & AF minor erit quàm AS, & AE multo minor, atque
adeo quatuor proportionalium EA AF AX AS, maxima erit Lem.8.
AS, minima * vero AE, quare SE maior * erit quàm XF. 25.Quinti.

Cadente vero AF in conuexam FK circumferentiam argumen- et Lem.7
tor hoc modo, ſed AE maior * eſt quàm AF, ergo & AX ma- 8.Tertij
ior * erit quàm AS, & quoniam AI ponitur non maior quàm 14.Quinti.
AF, ea minor erit quàm AE, ergo maior quàm AS; (rectangu-
lum enim EAS æquale eſt quadrato AI) quare & AF maior

 erit,

erit quàm AS, atque AE multo maior. Itaq; quatuor proportionalium EA AF AX AS minima erit AS, & per conſequens maxima * AE, vnde SE maior * erit quā XF. Hoc idē demōſtrauimus, & ſupra.

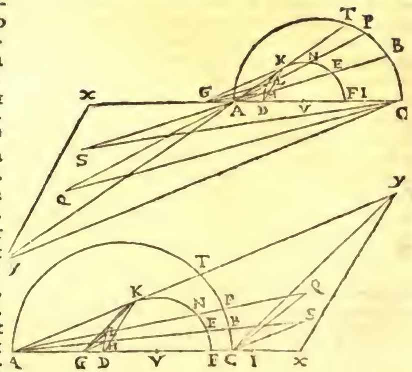
*Lem. 8.*

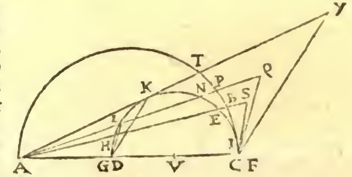
*25. Quinti. & Le. 7.*

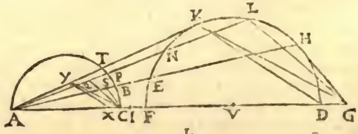
Vtroque igitur caſu, quoniam eſt vt AG ad AC ita * FC ad CX, & ità * EB ad BS, erit EB ad BS vt FC ad CX, & exiſtente E inter pūcta SB, erit conuertendo & diuidendo, exiſtente vero B inter SE, erit conuertendo & componendo; at exiſtente S inter EB, erit per conuerſionē rationis & conuertēdo vt SE ad EB ita XF ad FC, ſed SE oſtenſa eſt maior quàm XF, ergo & EB maior erit quàm FC. Atque eadem ratione demōſtrabimus quā cunque aliam maiorem eſſe quàm FC. Minima eſt igitur FC.

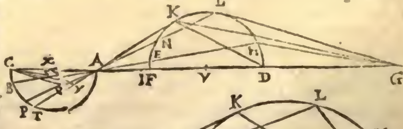
*Lem. 5.*

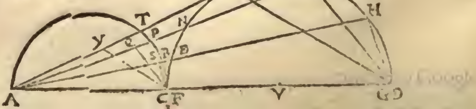
Iam agatur per punctū A quæuis recta



recta Linea ANP ſecans circumferentias KFTC in punctis NP, circumferentiam vero KD in L, ſitque NP maximę KT propinquior quàm EB. Iungatur igitur GL eique parallela agatur CQ ſecans NA, vel ei productæ occurrens in Q. Aequalia igitur erunt * rectangula NAQ EAS; quare vt * AN ad AE ita erit AS ad AQ. Si quidem AF in concauam circumferentiam FK cadit ſic argumentor, ſed AN minor eſt quàm AE, ergo & AS minor * erit quàm AQ. Et quoniam AI non eſt minor quàm AF ex poſitione, ea maior erit quàm AN, & conſequenter minor quàm AQ, rectangulum enim NAQ * æquatur quadrato AI, ergo & AF minor erit quàm AQ & AE multo minor, ac etiam minor & AN. Sic igitur quatuor proportionalium AN AE AS AQ maxima erit AQ, & conſequenter * minima AN, vnde QN maior * erit quàm SE. *Lem. 5* *16. Sexti* *14. Quinti.* *Lem. 5.* *Lem. 8.* *25. Quinti.*

Si vero AF in conuexam FK circumferentiam cadit argumentabor hoc modo, ſed AN maior * eſt quàm AE, ergo & AS maior erit quàm AQ. Et quoniam AI ponitur non maior quàm AF, ea minor erit quàm AN, & per conſequens maior quàm AQ, rectangulum enim NAQ æquale eſt quadrato AI, ergo & AF minor erit quàm AS, minor quoque & AE, atque AN multo minor. Sic igitur quatuor proportionalium AN AE AS AQ minima erit AQ, vnde maxima AN; quare QN maior * erit quàm SE. Atque hoc idem demonſtrauimus & ſupra. *vel Le. 7.* *8. Tertij.* *25. Quinti.* *vel Le. 7.*

Vtroque igitur caſu quoniam eſt vt AG ad AC ita * NP ad PQ & ita * EB ad BS, erit NP ad PQ vt EB ad BS, & exiſtente N inter PQ erit conuertendo & diuidendo, exiſtente vero P inter NQ erit conuertendo & componendo, at exiſtente Q inter NP, erit per conuerſionem rationis & conuertendo vt QN ad NP ita SE ad EB, ſed QN oſtenſa eſt maior quàm SE, ergo & NP maior erit quàm EB, hoc eſt propinquior maximæ maior quàm remotior. *Lem. 5.*

Deinde cadente AF in concauam circumferētiam FK. Sit AI nō maior minore rectarum AF AK. Vel cadente AF in conuexam circumferentiam FK, ſit AI non minor maiore rectarum AF AK. Primo igitur caſu AK minor * erit quam AF, vnde AI non maior quam AK ex poſitione. Secundo caſu AK * maior erit quam AF, & conſequenter AI non minor quam AK Similiter ex poſitione. Itaque vtroque caſu * FC maior erit quam KT. Oſtendendum eſt igitur FC maximam eſſe, KT minimam, atque propinquiorem ipſi FC remotiore maiorem eſſe. *8. Tertij.* *8. Tertij.* *Lem. 14.*

Ducatur enim per A quæuis recta linea AEB ſecans circumferentias KFTC in punctis EB, circumferentiam vero KD in H, & conectatur GH, eique parallela ducatur CS ſecans BA etiam continuatam in S. Rectangulum igitur FAX æquale * erit rectangulo EAS, quare vt AF ad AE ita erit AS ad AX. Cadente quidem *Coroll.* *Lem. 5.*

AF in

AF in concauam circumferentiam FK, ſic argumentor, ſed AF
8. Tertij. maior * eſt quam AE, ergo * & AS maior erit quam AX. Et quo-
14. Quinti. niam ponitur AI non maior quam AK, ea minor erit quam AF, ergo maior quam AX, rectangulum enim FAX æquale eſt quadrato AI. Cum Itaque AI maior ſit quam AX, erit & AK maior, àtque AE multo maior, & per conſequens maior & AF. Quatuor igitur proportionalium AF AE AS AX minima eſt AX, vnde
25 Quinti. vel Le 7. maxima AF, atque adeo XF maior * erit quam SE.

Cadente vero AF in conuexam circumferentiam FK argumen-
8. Tertij. tor hoc modo, ſed AF minor * eſt quam AE, ergo & * AS minor
14. Quinti. erit quam AX. Et quoniam ponitur AI non minor quam AK, ea maior erit quam AF, & per conſequens minor quam AX, rectan-
Lem. 5. gulum enim FAX æquatur * quadrato AI. Cum igitur AI minor ſit quam AX, erit minor & AK, & AE multo minor, & conſequenter minor quoque & AF. Sic igitur quatuor proportionalium AF AE
25. Quinti vel Lem. 7. AS AX maxima erit AX, minima vero AF, atque adeo XF maior * erit quam SE, quod & ſuperiori caſu demonſtrauimus.

Lem. 5. In vtroque caſu igitur, quoniam eſt vt AG ad AC ita * FC ad CX, & ita * EB ad BS, erit FC ad CX vt EB ad BS, & exiſtente C inter XF erit conuertendo & componendo, exiſtente vero F inter XC, erit conuertendo & diuidendo, at exiſtente X inter FC, erit per conuerſionem rationis & conuertendo vt XF ad FC ita SE ad EB, ſed XF oſtenſa eſt maior quam SE, ergo & FC maior erit quam EB. Eademque ratione demonſtrabitur omnibus alijs maior.
Corol. Maxima eſt igitur FC.

Lem. 5. Et quoniam æqualia * ſunt rectangula EAS YAK, erit vt * AE
16. Quinti. ad AK ita AY ad AS, ſi igitur AF cadit in concauam circumfe-
8 Tertij. rentiam FK, ſic argumentor, ſed AE maior * eſt, quam AK, ergo & * AY maior erit quam AS. Et quoniam ponitur AI non ma-
14. Quinti. ior quam AK, ea minor erit quam AE, maior autem quam AS, rectangulum enim EAS æquatur quadrato AI. Cum igitur AI maior ſit quam AS, erit & AK maior, & AE multo maior. Atque
Lem. 8. adeo quatuor proportionalium AE AK AY AS minima erit AS,
25. Quinti vel Lem. 7. & per conſequens * maxima AE, quare SE * maior erit quam YK.

Si vero AF in conuexam FK circumferentiam cadit, argumen-
8. Tertij. tabor in hunc modum, ſed AE minor * eſt quam AK, ergo & AY minor erit quam AS. Et quoniam ponitur AI non minor quam AK, ea maior erit quam AE, vnde minor quam AS, rectangulum
Lem 5. enim EAS æquale * eſt quadrato AI. Cum igitur AI minor ſit quam AS, erit minor, & AK, atque AE multo minor. Itaque quatuor proportionalium AE AK AY AS maxima erit AS, mi-
Lem. 8. nima * vero AE, ergo SE maior erit quam YK. Idemque demonſtrauimus & ſupra.

Lem. 5. Et quoniam eſt vt AG ad AC ita * EB ad BS, & ita * KT ad TY,

TY, erit EB ad BS vt KT ad TY, & exiſtente B inter ES, erit conuertendo & componendo, exiſtente vero E inter SB erit conuertendo & diuidendo; at exiſtente S inter EB erit per conuerſionem rationis & conuertendo vt SE ad EB ita YK ad KT, ſed oſtenſa eſt SE maior quam YK, ergo & EB maior erit quam KT. atque eadem ratione demonſtrabimus quamcunque aliam maiorem eſſe quam KT. Minima eſt igitur KT.

Denique ducatur per A vtcunque recta linea ANP ſecans circumferentias KF TC in punctis N P, circumferentiam vero KD in L, & ſit NP ipſi FC maximæ propinquior quam EB, & conectatur GL, cui parallela agatur CQ ſecans NA vel ei productæ occurrens in Q. Duo igitur rectangula NAQ EAS æqualia erunt quare vt AN ad AE, ita erit AS ad AQ. Cadente quidem AF in concauam circumferentiam FK hoc modo argumentor, ſed AN maior * eſt quam AE, ergo * & AS maior erit quam AQ. & quoniam AI non eſt maior quam AK, ſic enim ponitur, ea minor erit quam AN, & conſequenter maior quam AQ, quia rectangulum NAQ æquatur * quadrato AI. Cum igitur AI maior ſit quam AQ, erit AE multo maior; & multo maior AN. Sic igitur quatuor proportionalium AN AE AS AQ minima erit AQ, maxima * AN, vnde QN maior * erit quam SE.

*8. Tertij.* *14. Quinti.* *Lem. 5.* *Lem 8.* *25. Quinti.* *vel Le 7.*

Cadente vero AF in conuexam FK circumferentiam, ſic argumentor, ſed AN minor * eſt quam AE, ergo & AS * minor erit quam AQ. Et quoniam AI ponitur non minor quam AK, ea maior erit quam AN, vnde minor quam AQ, rectangulum enim NAQ æquale * eſt quadrato AI. Cum igitur AI minor ſit quam AQ erit AE multo minor, & multo minor ipſa AN; vnde quatuor proportionalium AN AE AS AQ maxima erit AQ, * minima vero AN, atque adeo QN maior * erit quam SE, quod etiam demonſtrauimus & ſupra.

*8. Tertij.* *14 Quinti.* *Lem. 5.* *Lem. 8.* *25. Quinti.* *vel Le. 7.*

Quoniam igitur in vtroque caſu vt AG ad AC ita * eſt NP ad PQ & ita * EB ad BS, erit NP ad PQ vt EB ad BS, & exiſtente P inter QN, erit conuertendo & componendo, exiſtente vero N inter QP, erit conuertendo & diuidendo, at exiſtente Q inter PN, erit per conuerſionem rationis, & conuertendo vt QN ad NP ita SE ad EB, ſed QN maior eſt, quàm SE vt demonſtrauimus; ergo & * NP quàm EB maior erit, hoc eſt propinquior FC maximæ maior quam ea quæ eſt remotior. Maior igitur rectarum KT FC maxima eſt omnium, quæ ad A pertingentes inter circumferentias KF TC interijciuntur, minor vero minima, atque propinquior maximæ maior remotiore, quod erat oſtendendum.

*Lem. 5.* *14. Quinti.*

*Facilius & expeditius in ſemicirculis ſe inuicem ſecantibus aut tangentibus ac etiam in multis alijs propoſitum poſſet demon-* ſtrari,

Digitized by Google

*ſtrari, ſed eam demonſtrationem breuitatis cauſa omittimus; quandoquidem illa ſuperiori quæ eſt vniuerſalis & ad omnes caſus conſentanea idem præſtitimus.*

*Idem autem Lemma poſſet quoque ita enunciari.*

SInt duo ſemicirculi A B C D E F in directum baſes habentes, & recta A K contingens ſemicirculum D E F in K, ſecet ipſum A B C in T, & ex centro circuli D E F quod ſit V ponatur V G æqualis V C. Sit autem in ſemicirculis, quorum alter reliquum includit, ratio A D ad A F non minor ratione A G ad A C, in ſemicirculis vero ex oppoſito exiſtentibus, non maior. Dico maiorem rectarum K T F C maximam eſſe omnium quæ per A ductæ inter circumferentias K F T C interijciuntur, minorem vero minimam. Aliarum autem propinquiorem maximæ, remotiore maiorem eſſe.

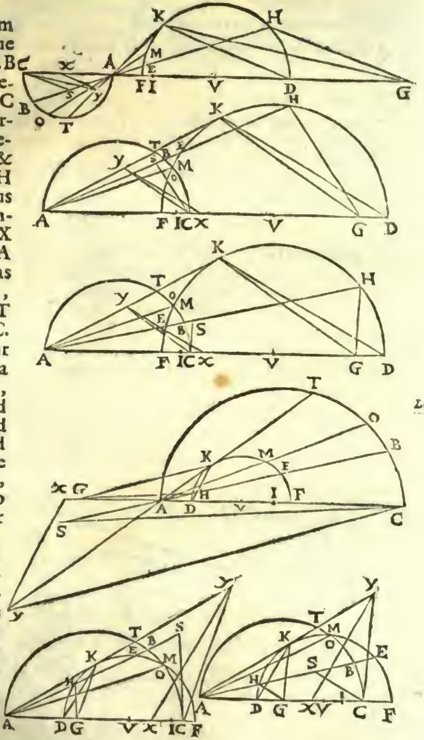
*Sed huiuſmodi enunciatio parum commoda videtur, neque enim omnes caſus amplecti poteſt, neque in hanc formulam ſequens Lemma aut vigeſimum poſſent bene concipi. Ideo priore vtimur tanquam commodiore & clariore.*

## Lemma XVI.

IIſdem poſitis. Sit autem A I minor maiori rectarum A F A K, maior minore. Ergo à puncto A ad circumferentiam F K poterit duci recta A M ipſi A I æqualis. Ducatur igitur, & producatur ad circumferentiam A B C in O. Dico maiorem rectarum K T F C maximam eſſe omnium, quæ per A ducuntur & inter circumferentias K F T C interijciuntur, minimam vero M O. Aliarum au-

tem

tem propinquiorem minimæ, remotiore ex eadem parte minorem eſſe.

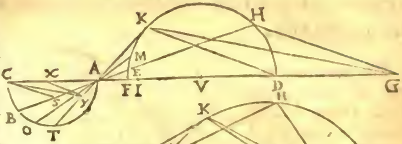


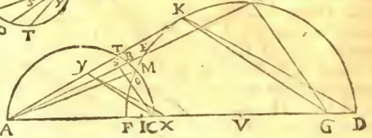
Ducatur enim per A vtcunque recta linea AEBC ſecans circumferentias EK TC in punctis E B, circumferentiam vero KD in H, & conectantur GH GK KD, quibus parallelæ ducantur CS CY YX ſecantes EA KA FA continuatas in punctis SYX, & ſit primum KT maior quam FC. Quoniam igitur vt AG ad AC ita *eſt FC ad CX, & ita * KT ad TY, erit KT ad TY vt FC ad CX, & exiſtente pũcto K inter YT, erit conuertendo & diuidẽdo & rurſus conuertendo, exiſtẽte vero T inter YK, erit conuertendo & componẽdo & rurſus conuertendo, at exiſtente Y inter KT, erit per conuerſionem rationis, vt KT ad YK ita FC ad XF, ſed KT ponitur maior quàm FC: Ergo * & YK quam XF maior erit.

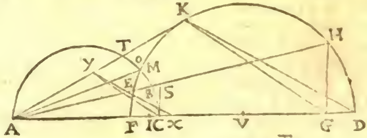
Lem. 3.

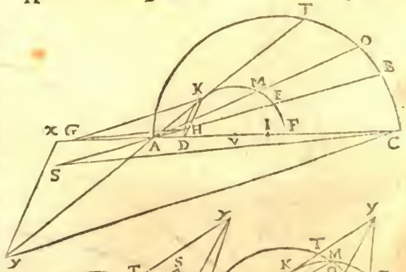
14. Quinti.

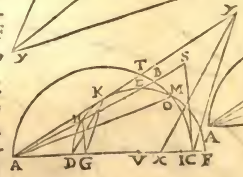
D Et

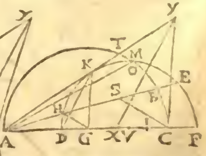


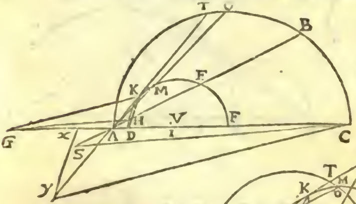



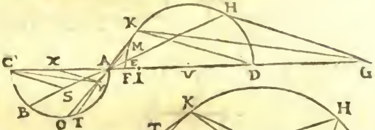

Et quoniam æ-
*Corol. Lem.5.* qualia * ſunt re-
ctangula Y A K
*16.Sexti* F A X, erit * A Y
ad A F ſicut A X
ad A K, ſed Y K
oſtenſa eſt maior
quam X F, hoc
eſt compoſita ex
extremis maior
quam compoſita
ex medijs, vel dif-
ferentia extrema-
rum maior quam
differentia media-
rum, ergo altera
extremarum A Y
*Lem 9.* AK maxima * erit
*et Le.10.* altera minima. In
ſemicirculis qui-
dem, in quibus
A F in conuexam
circumferentiam
F K cadit, ſic ar-
gumētor. Sed A K
non eſt minima,
*8 Tertij.* quia maior * eſt
quàm A F, ergo
maxima erit; Vn-
*Lem.8.* de AY * minima
Itaque A Y mi-
nor erit quàm A F
& multo minor,
quàm A E.

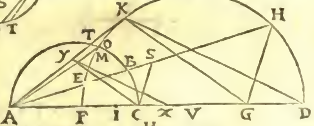
Similiter quo-
*Corol. Lem.5.* niam æqualia *
ſunt rectangula
Y A K E A S, e-
*16.Sexti.* rit * vt A K ad
A E ità A S ad
*8.Tertij. 14 Quinti.* A Y, ſed A K maior * eſt quàm A E, ergo * & AS maior erit quam
A Y. Cum igitur AY minor ſit quàm A S, & minor quam A E vt
demonſtrauimus, ac etiã minor quã AK, erit ipſa AY minima qua-
*Lem 8.* tuor proportionaliũ A K AE AS AY, ergo maxima * A K. Atque
adco

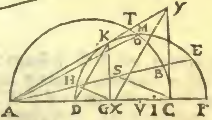
adeò Y K cōpoſita ex maxima & minima, vel earundē differentia, * maior erit quàm S E cōpoſita ex reliquis, vel reliquarū differentia. *25 Quinti.*
In ſemicirculis vero, in quibus A F cadit in concauam circumferentiam F K in hunc modum argumentor. Sed A K non eſt maxima, quia minor * eſt quàm A F, Ergo minima erit, & conſequenter * A Y maxima, vnde A Y maior erit quàm A F, & multo maior quàm A E. Et quoniam æqualia ſunt rectangula Y A K E A S, erit * vt A K ad A E ita A S ad A Y, ſed A K minor * eſt quam A E, ergo & A S minor erit quam A Y. Cum itaque A Y maior ſit quàm A S, & maior quam A E, vt eſt demonſtratum, ac etiam maior quàm A K, erit ipſa A Y maxima quatuor proportionalium AK A E A S A Y, minima * vero A K, ſed compoſita ex maxima & minima maior * eſt quam compoſita ex reliquis, Similiter & differentia maximæ & minimæ maior * quam differentia reliquarum, ergo Y K maior erit quàm S E, quod etiam cadente A F in conuexam circumferentiam F K demonſtrauimus. *vel Le 7. 8.Tertij. Lem.8. Corol. Lem.5. 16.Sexti 8.Tertij Lem 8. 25.Quinti. Lem.7.*

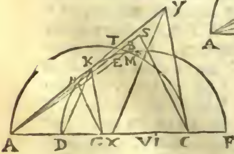
Ergo in vtroque caſu quoniam eſt vt A G ad A C ità * E B ad B S, & ità * K T ad T Y, erit K T ad T Y vt E B ad B S, & exiſtente K inter Y T, erit conuertendo & diuidendo, exiſtente vero T inter Y K, erit conuertendo & cōponendo, at exiſtēte Y inter K T, erit per conuerſionem rationis & conuertendo, vt Y K ad K T ita S E ad E B, ſed Y K oſtenſa eſt maior quàm S E, ergo & K T quā E B maior erit. Et ſic demonſtrabitur omnibus alijs maior. Maxima eſt igitur K T. *Lem.5.*

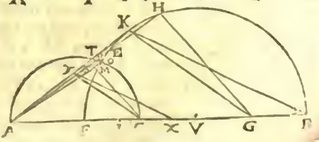


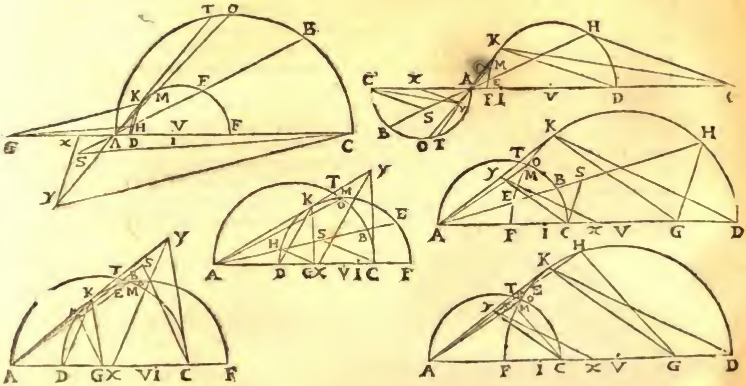




Sed ſit F C maior quam KT. Quoniam igitur vt A G ad A C

 ita

Lem.5. ita*eſt F C ad X C, & ita * K T ad T Y, erit F C ad C X vt K T ad T Y, & exiſtente K inter Y T, erit conuertendo & diuidendo ac rurſus conuertendo, exiſtente vero T inter Y K, erit conuertendo & cōponendo & iterum conuertendo, at exiſtente Y inter K T, erit per conuerſionem rationis, vt F C ad F X ita K T ad K Y, ſed F C ponitur maior quàm K T, ergo & F X maior erit quam Y K, ſed F X cōpoſita eſt ex extremis quatuor proportionalium AF AY AK




A X, ipſa vero Y K ex medijs, vel F X differentia eſt extremarum,
16.Sexti. Y K differentia mediarum, (conſtat quidem eas proportionales *
Corol. eſſe, ex eo quod æqualia * ſunt rectangula F A X Y A K) altera igitur
Lem.5. extremarum AF A X erit * maxima, altera minima. Cadente qui-
Lem.9. vel Le.10 dem A F in conuexam circumferentiam F K hoc modo argumen-
8 Tertij. tor. * Sed A F non eſt maxima, quia minor * eſt quàm A K, ergo
Corol. minima erit, & conſequenter A X maxima. Itaque A X maior erit
Lem.5. quam A K, & ideo multo maior quam AE. Et quoniam æqualia *
8.Tertij. ſunt rectangula F A X E A S, erit vt A F ad A E minor * videlicet
14.Quinti. ad maiorem ita A S ad AX, ergo & *A S minor erit quam AX,

ſeu

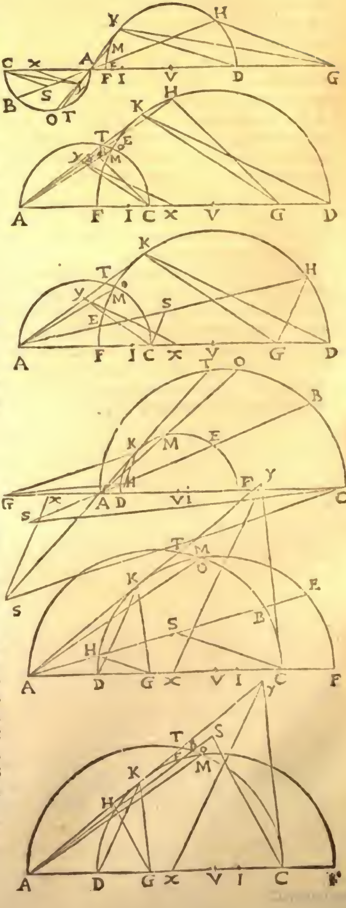
ſeu quod idem eſt A X maior quam A S, ſed A X oſtenſa eſt quo-
que maior quam A E, & tanto manifeſtius maior eſt quam A F. Er-
go quatuor proportionalium A F A E A S A X maxima erit A X,
& per conſequens * minima A F, vnde X F maior * erit quam S E. *Lem. 8.*
Cadente vero A F in concauam circumferentiam F K, ſic argu- *25. Quinti.*
mentor. Sed A F non eſt minima, quia maior * eſt quam A K, er-
go maxima erit, vnde * A X minima, ſic igitur A X minor erit quàm *& Le. 7.* *8. Tertij.*
A K, & conſequenter multo minor quàm A E. Et quoniam pro- *Lem 8.*
pter* æqualitatem rectangulorum FAX EAS * eſt vt A F ad A E, *Corol.*
maior * videlicet ad minorem, Ità A S ad A X, ergo & A S ma- *Lem. 5.*
ior erit quàm A X, hoc eſt A X minor quàm A S, ſed A X oſten- *16. Sexti* *8. Tertij.*
ſa eſt minor quàm A E, & conſequenter minor etiam quam A F,
Ergo quatuor proportionalium A F A E A S A X minima erit A X;
quare A F* maxima, vnde X F maior* erit quàm S E, quod etiam *Lem. 8.*
demonſtrauimus, & ſupra.
Ergo in vtroque caſu quoniam eſt vt AG ad A C ita* F C ad C X *25. Quinti.*
& ita* E B ad B S, erit F C ad C X vt E B ad B S, & exiſtente E in- *& Le 7.*
ter S B, erit conuertendo & diuidendo, exiſtente vero B inter S E, *Lem. 5.*
erit conuertendo & componendo, at exiſtente S inter E B, erit per
conuerſionem rationis & conuertendo, vt X F ad F C ità S E ad
E B, ſed oſtenſa eſt X F maior quàm S E, ergo & F C quàm E B
maior erit. Atque eadem ratione demonſtrabitur maior omnibus
alijs. Quare maxima eſt F C.

Sed

Digitized by Google

Sed ſint æquales K T F C. Quoniam igitur vt *Lem.5.* A G ad A C ita * eſt F C ad C X, & ita * K T ad T Y, erit F C ad C X ſicut K T ad T Y, ſed F C ponitur æqualis K T, ergo & C X æqualis erit T Y, quare per ſubductionem vel additionem æqualium æqualibus erunt æquales & X F Y K, ſed X F compoſita eſt ex extremis quatuor proportionalium F A A Y A K A X, ipſa vero Y K ex medijs, vel X F differentia eſt extremarum, Y K differentia mediarum, ( Conſtat quidem *16.Sexti.* eas*proportionales eſſe, ex eo quod rectangula *Corol. Lem.5.* F A X Y A K æqualia* ſint) ergo F A A X ipſis *Lem.11.* Y A A K æquales*erunt, maior videlicet maiori, minor minori. Itaque F A æqualis erit alteri ipſarum Y A A K, ſed non eſt æqualis ipſi A K, hæc enim tangit circulum D E F, illa vero ſecat. Ergo ipſa F A æqualis erit ipſi A Y.

Et quoniam æqualia *Corol. Lem.5. 16.Sexti.* *ſunt rectangula Y A K E A S, erit*A Y ad A E vt A S ad A K. Cadente autem A F in conuexam circumferentiam F K ſic argumentor. Sed A Y, cum ſit oſtenſa æqualis *8.Tertij.* ipſi A F, minor*eſt quã A E, ergo & A S minor erit



erit quàm A K, eſt autem & A E minor quàm A K, & A Y multo minor. Quatuor igitur proportionalium A Y A E A S A K maxima erit A K, & conſequenter *minima A Y, vnde Y K maior* erit quam S E. *Lem. 8.* *25. Quinti &*

Cadente vero A F in concauam circumferentiam F K, argumentor hoc modo. Sed A Y cum ſit æqualis ipſi A F maior* eſt quam A E; ergo & *A S maior erit quam A K, & A Y multo maior. Itaque quatuor proportionalium A Y A E A S A K minima erit A K, & per conſequens maxima *A Y, vnde Y K maior* erit quam S E, quod etiam demonſtratum eſt & ſuperiori caſu. *Lem. 7.* *8. Tertij.* *14. Quinti.* *Lem 8.* *25. Quinti &*

Quoniam igitur in vtroque caſu vt A G ad A C ita* eſt E B ad B S, & ita* K T ad T Y, erit K T ad T Y vt E B ad B S, & exiſtente K inter Y T, erit conuertendo & diuidendo, exiſtente vero T inter Y K, erit conuertendo & componendo, at exiſtente Y inter K T, erit per conuerſionem rationis & conuertendo, vt Y K ad K T ita S E ad E B, ſed oſtenſa eſt Y K maior quam S E, ergo & K T maior erit quam E B. Eademque ratione demonſtrabitur maior omnibus alijs. Quare & F C, cum ſit æqualis ipſi K T, erit omnibus maior. Itaque vtraque maxima erit. Maior igitur rectarum K T F C maxima eſt omnium ductarum per A, quæ inter circumferẽtias K F T C interijciuntur, quod eſto primum. *Lem 7.* *Lem. 5.*

Iam vero ad demonſtrandam minimam producatur vbi opus exigit A M, vt circumferentiam K D ſecet in R, & iungatur G R, cui parallela agatur C ℞ ſecans M A continuatam in ℞. Rectangulum igitur M A ℞ æquale erit quadrato A I, hoc eſt quadrato A M, ſunt enim æquales A I A M, quare A M æqualis erit ipſi A ℞. Et quoniam rectangulum F A X æquale* eſt quadrato A I, hoc eſt quadrato A M, proportionales erunt* A F A M A X, ſunt autem & inæquales, recta enim A F vel ea producta tranſit per centrum circuli D E F, ſecus vero A M, ergo X F compoſita ex extremis maior erit quam dupla media, hoc eſt quam M ℞. Et quoniam eſt vt A G ad A C ita* F C ad C X, & ita* M O ad O ℞, erit F C ad C X vt M O ad O ℞, & exiſtente X inter F C, erit per conuerſionem rationis & conuertendo, exiſtente vero F inter C X, erit conuertendo & diuidendo vt F X ad F C ita M ℞ ad M O, ſed maior eſt F X quam M ℞, ſic demonſtrauimus, ergo & F C quam M O maior erit. *Lem. 5.* *17. Sexti.* *Lem. 5.*

Pari ratione, Quoniam rectangulum Y A K æquatur *quadrato A I hoc eſt quadrato A M, proportionales* erunt A K A M A Y, ſed ſunt inæquales, A K enim tangit circulum D E F, A M vero ſecat, ergo Y K compoſita ex extremis maior erit quam M ℞, media videlicet dupla. Et quoniam vt A G ad A C ita* eſt K T ad T Y, & ita* M O ad O ℞, erit vt K T ad T Y ita M O ad O ℞, & exi- *Lem. 5.* *17. Sexti.* *Lem 5.*

ſtente

Digitized by Google

ſtente Y inter KT, erit per conuerſionem rationis & conuertendo, exiſtente vero K inter YT, erit conuertendo & diuidendo, vt YK ad KT ita M ℞ ad MO, ſed YK oſtenſa eſt maior quam M ℞, ergo & KT maior erit quam MO.

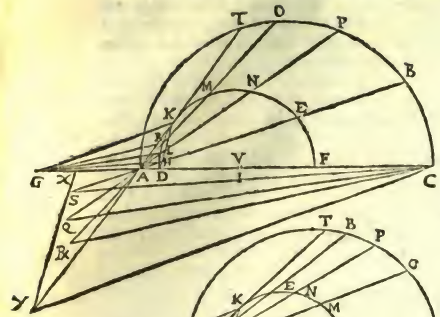
*Lem. 5.* Aequè quoniam rectãgulum EAS æquale* eſt quadrato AI, hoc
*17. Sexti.* eſt quadrato AM, proportionales* erunt AE AM AS, ſed & inæ-
*8. Tertij.* *quales, ergo ES compoſita ex extremis maior erit quam dupla media, hoc eſt quam M ℞. Et quoniam eſt vt AG ad AC ita* EB ad
*Lem. 5.* BS, & ita* MO ad O ℞, erit EB ad BS vt MO ad O ℞, & exiſtente S inter EB, erit per conuerſionem rationis & conuertendo, exiſtente vero E inter BS, erit conuertendo & diuidendo, vt SE ad EB ita M ℞ ad MO, ſed SE maior eſt quam M ℞ vt demonſtrauimus, ergo & EB quam MO maior erit. Atque eadem ratione demonſtrabimus omnes alias maiores eſſe ipſa MO. Minima eſt igitur MO omnium quæ ad A pertingentes inter circumferentias KF TC interijciuutur, quod eſto ſecundum.

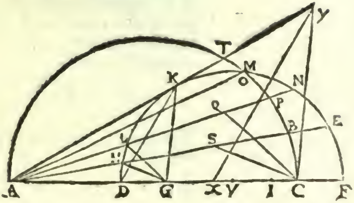
Et ſi in ſemicirculis ſe inuicem ſecantibus non datur minima, ea enim quæ propinquior eſt puncto ſectiones remotiore ex eadem parte ſemper minor eſt, ſed vt omnibus figuris vna eademque demonſtratio conueniat, in ſemicirculis ſe ſe ſecantibus punctum ſectionis vocetur minima.

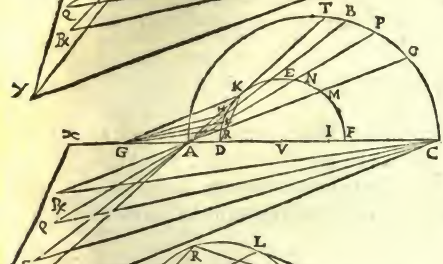
Ducatur ergo per A quæuis recta linea ANP ſecans circumferentias KF T,C in punctis NP ita vt NP minimæ MO ſit propinquior quam EB, eaque ſecet circumferentiam KD in L, ſitque NPEB ex eadem parte minimæ, & iungatur GL, cui parallela ducatur CQ ſecans NA, vel ei productæ occurrens in Q. Aequalia
*Corol.* igitur* erunt rectangula EAS NAQ, quare vt AE ad AN ita
*Lem. 5.* erit AQ ad AS, ſi igitur AE maior ſit quam AN, ſunt* enim
*8. Tertij.* inæquales, erit & AQ maior quam AS, ſed AQ minor eſt quam
*Lem. 5.* AN rectangulum enim NAQ æquatur* quadrato AI, hoc eſt
*8 Tertij.* quadrato AM, & eſt AN* maior quam AM, ergo ipſa AN maior erit quam vtraque ipſarum AQ AS, & per conſequens AE multo maior. Sic igitur quatuor proportionalium AE AN AQ
*Lem. 8.* AS maxima erit AE, minima* vero AS, vnde SE maior erit quam
*25. Quinti.* QN, compoſita enim ex maxima, & minima maior* eſt quam com-
*vel Le. 7.* poſita ex reliquis, ſimiliter & differentia maximæ & minimæ* maior quam differentia reliquarum.

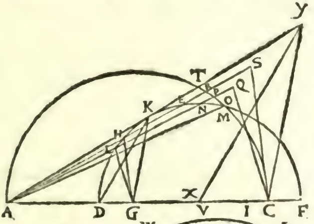
Idem demonſtrabimus ſi AE minor ſit quam AN, nam cum ſint proportionales AE AN AQ AS, & AE minor quam AN, erit & AQ minor quam AS, ſed AQ maior eſt quam AN, quia rectan-
*Lem. 5.* gulum NAQ æquale* eſt quadrato AI, hoc eſt quadrato AM, &
*8. Tertij.* AN minor* quam AM. Ergo AN minor erit vtraque ipſarum AQ AS, & conſequenter AE multo minor. Itaque quatuor proportionalium AE AN AQ AS minima erit AE, vnde maxima

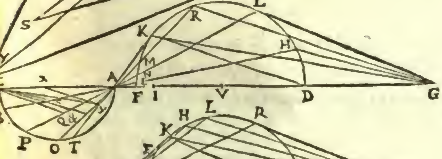
AS, &

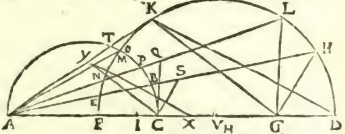


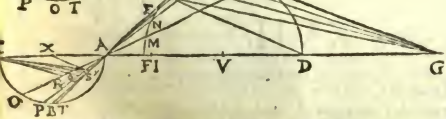


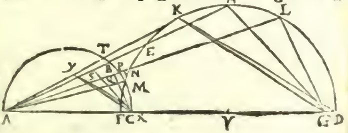












AS, & ideo SE maior erit quam QN, quod demonſtrauimus & ſupra.

Quoniam igitur in vtroque caſu eſt vt AG ad AC ita *EB ad BS, & ita *NP ad PQ, erit EB ad BS vt NP ad PQ, & exiſtente E inter SB, erit conuertendo & diuidendo, exiſtente vero B inter SE, erit conuertendo & componendo, at exiſtente S inter EB, erit per *Lem.5.*

conuerſionem rationis & conuertendo, vt SE ad EB ita QN ad NP, ſed oſtenſa eſt SE maior quam QN, ergo & EB quam NP maior erit, ſeu quod idem eſt NP minor quam EB. Sic igitur propinquior minimè minor eſt remotiore, quod poſtremo loco erat demonſtrandum.

## COROLLARIVM I.

EX demonſtratis patet KT maximá eſſe omnium, quæ inter circumferentias KM TO interijciuntur, etenim propinquior minimæ, remotiore ex eadem parte minor eſt, ergo KT cum ſit remotiſſima omnium, omnium maxima erit.

## COROLLARIVM II.

SImiliter patet FC maximam eſſe omnium, quæ inter circumferentias MF OC interijciuntur, propinquior enim minimæ remotiore ex eadem parte minor eſt, itaque FC quippe quæ remotiſſima eſt omnium, omnium maxima erit.

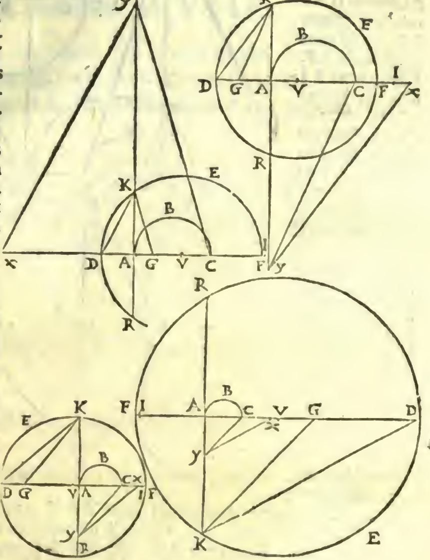
*Et hoc Lemma facilius in ſemicirculis ſe inuicem ſecantibus poſſet demonſtrari, ſed quoniam vna eademque vniuerſali demonſtratione illud perfecimus, particularem breuitatis cauſa omittimus.*

# Lemma XVII.

SInt duo ſemicirculi ABC DEF in directum baſes habentes, & recta AK perpendicularis ipſi DF ſecet ſemicirculum DEF in K, & ex centro circuli DEF, quod
Lem.5. ſit V ponatur VG æqualis VC, & fiat* vt AG ad AC ita quadratum AK ad quadratum AI. Sit autem AF maior quam AK, & AI non minor quam AF. Vel ſit

AF mi-

A F minor quam A K, & A I non maior quam A F. Dico A K maiorem eſſe quam F C.

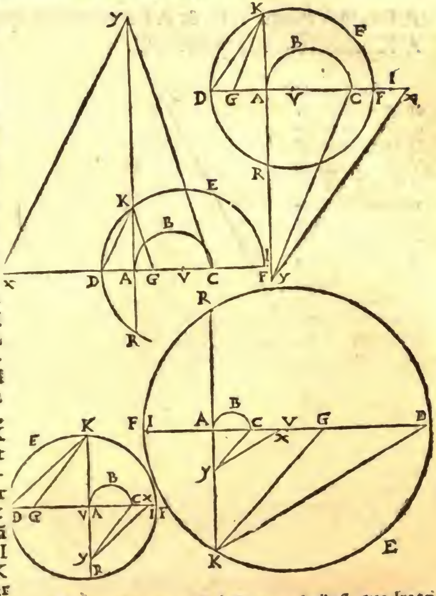



Iungantur enim G K K D, quibus parallelæ agantur C Y Y X ſecantes AK FA continuatas in punctis Y X, & compleatur circulus D E F R, quem K A producta ſecet in R, & ſit primum AF maior quam A K, & A I non minor quam A F, ergo neque A X minor erit quā A F, alioquin rectāgulū FAX minus eſſet quadrato A I, quod eſt falſum, eſt enim* æquale. *Lem.6.* Cū igitur AF maior ſit quàm AK, & A X non minor quàm A F, erit ipſa AX maior quam A K. Similiter quoniā A K minor eſt quam A F, & per conſequens minor quàm A I erit A Y maior quam A K, rectangulum enim Y A K æquale

* eſt quadrato A I, ſed & vtraque A F A X oſtenſa eſt maior quam *Lem.6.*
A K, ergo quatuor proportionalium A K A F A X A Y minima *Lem.8.*
erit A K, & conſequenter maxima * A Y, (conſtat quidem* eas *16.Sexti.*
proportionales eſſe, quia æqualia* ſunt rect angula Y A K F A X) *Corol.*
quare Y R maior erit quam XF, æqualis enim compoſitæ ex maxi- *Lem.6.*
ma & minima maior* eſt quam compoſita ex reliquis, ſimiliter & *25.Quinti.*
ea quæ æqualis eſt differentiæ inter maximam & minimam maior* *Lem.7.*

eſt quam reliquarum differentia.

Idem demonſtrabimus ſi AF minor ſit quam AK, & AI non maior quã AF. Nam cum AI non ſit maior quam AF, neque AX maior erit quam ipſa AF, alioquin rectangulum FAX maius eſſet quadrato AI quod fieri non
Lem.6. poteſt, eſt * enim æquale, ſed ponitur AF minor quam AK, ergo & ipſa AX minor erit. Et quonia AI ponitur nõ maior quam AF & AF minor quã AK, erit & AI minor quã AK & cõſequenter



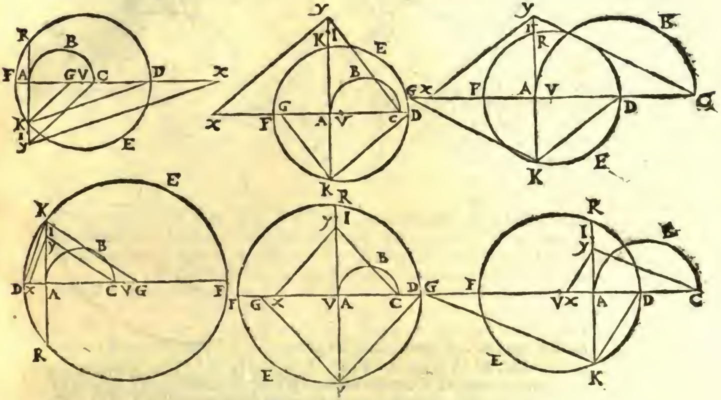

Lem.6. AY multo minor, rectangulum enim YAK æquale * eſt quadrato AI. Cũ igitur ſingulæ AY AF AX oſtenſæ ſint minores quã AK,
Lem. 8. erit ipſa AK maxima, vnde AY * minima, ſunt enim proportionales
16. Sexti. * AK AF AX AY propter æqualitatem * rectangulorum YAK
Coroll. FAX, ſed compoſita ex maxima, & minima maior * eſt quam
Lem.6. compoſita ex reliquis, vel maximæ & minimæ differentia maior *
25. Quinti. quam differentia inter reliquas, ergo YR maior erit quam XF, quod
Lem.7. etiam demonſtrauimus & ſupra.

In vtroque igitur caſu, quoniam eſt vt AG ad AC ita AK ad AY, & ita FC ad CX, erit AK, hoc eſt AR ad AY, vt FC ad CX, & exiſtẽte puncto A inter puncta YR, erit conuertẽdo & componendo, exiſtente vero R inter AY, erit conuertendo & diuidendo, at exiſtente Y inter AR, erit per conuerſionem rationis & conuertendo,

uertendo, vt Y R ad A R ita X F ad F C, ſed oſtenſa eſt Y R maior quam X F, ergo & A R, hoc eſt A K maior erit quam F C, quod erat demonſtrandum.

# Lemma XVIII.

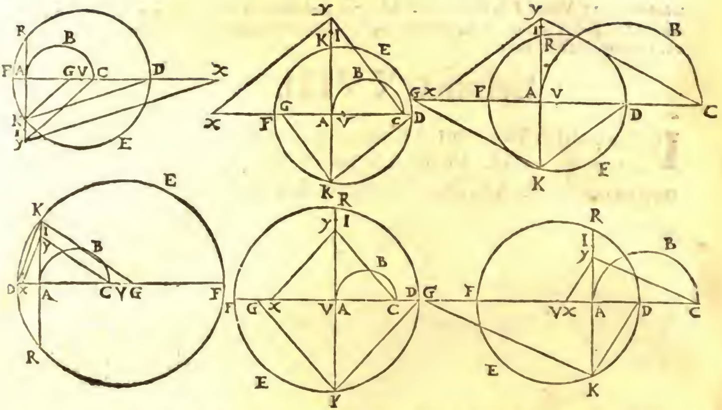
Iisdem poſitis. Sit autem AK maior quàm AF, & AI non minor quàm AK. Vel ſit A K minor quàm A F, & AI non maior quàm AK. Dico FC quam A K maiorem eſſe.



Conectantur enim vt prius G K K D, eiſque parallelæ ducantur C Y Y X, quas ſecent A K F A etiam continuatæ in punctis Y X, & compleatur circulus D E F R, quem K A producta ſecet in R. Et ſit primum A K maior quàm A F, & A I non minor quàm A K Ergo neque AY minor erit quàm AK, rectangulum enim YAK æquale * eſt quadrato A I, ſed AK ponitur maior quàm A F, Ergo & AY maior erit quàm A F. Et quoniam A I ponitur non minor quàm AK, ea maior erit quàm A F, & A X multo maior, rectangulum enim F A X æquale * eſt quadrato A I. Lem. 6.

Cum itaque vnaquæque ipſarum A X A K A Y maior ſit quàm AF, erit ipſa A F minima. Sed propter æqualitatem *rectangulorũ Lem. 6. Corol. Lem. 6.

FAX

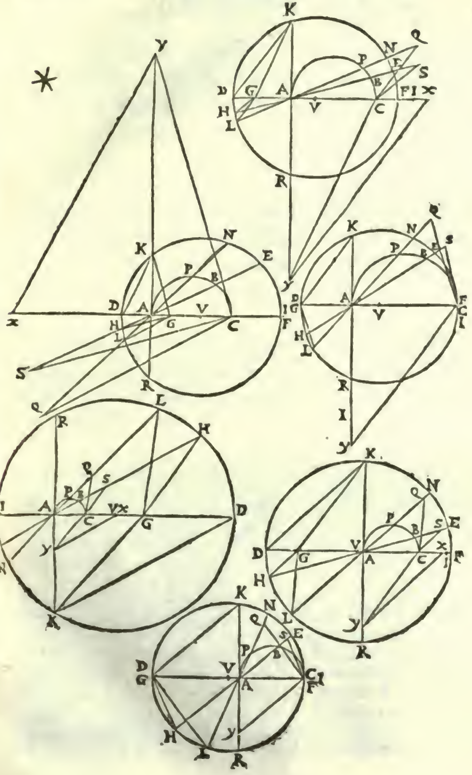


FAX YAK proportionales ſunt AF AK AY AX, Ergo AX,
*Lem.8. altera nempè extremarum, maxima*erit, ſed maxima, & minima ma-
25.Quinti. iores*ſunt reliquis, vel differentia maximæ, & minimæ maior eſt quã differentia reliquarum, Ergo XF maior erit quàm YR.

Lem.7. Vel ſit AK minor quàm AF, & AI non maior quàm AK. Ergo neque AY maior erit quàm AK, rectangulum enim YAK æ-
Lem.6. quale*eſt quadrato AI, ſed AK ponitur minor quàm AF, Ergo & AY quàm AF minor erit. Et quoniam AI ponitur non maior quàm AK, & AK minor quàm AF, erit & AI minor quàm AF,
Lem.6. & conſequenter AX multo minor rectangulũ enim FAX æquale* eſt quadrato AI. Cum igitur vnaquæque rectarum AX AY AK oſtenſa ſit minor quàm AF, ipſa AF, maxima erit, vnde AX*mi-
Lem.8. nima, ſunt enim propter *æqualitatem rectangulorum FAX
Corol. Lem.6. YAK proportionales AF AK AY AX. Ergo XF, maxima vi-
25.Quinti. delicet & minima, vel earum differentia, maior * erit quàm YR, quæ eſt compoſita ex reliquis, vel reliquarum differentia, quod etiam &
Lem.7. in ſuperiori caſu demonſtrauimus.

Lem.6. In vtroque igitur caſu. Quoniam eſt vt AG ad AC ità*FC ad CX, & ità*AK ad AY, erit vt FC ad CX ità AK hoc eſt AR ad AY, & exiſtente F inter XC, erit conuertendo & diuidendo, exiſtente vero C inter FX, erit conuertendo & componendo, at exiſtente X inter FC, erit per conuerſionem rationis & conuertendo,

*Ponatur hoc folium ſub linea ſecunda paginæ 39. & figuræ reſpiciant ipſam paginam vt ſeruiant Lemmati xix.*



Digitized by Google

vt X F ad F C ita Y R ad AK, ſed X F oſtenſa eſt maior quàm Y R ergo & F C quàm AK maior erit, quod erat oſtendendum.

# Lemma XIX.

Sint duo ſemicirculi A B C DEF in directum baſes habentes, & recta A K perpendicularis ipſi D F ſecet ſemicirculum D E F in K, & ex centro circuli D E F, quod ſit V, ponatur V G æqualis V C, & fiat * vt A G ad A C itá quadratum A K ad quadratum A I. Sit autem A I vel non minor maiore rectarum A F A K, vel non maior minore. Dico maiorem rectarum A K F C maximam eſſe omnium, quæ per A ductæ inter circumferentias ABC K F interijciuntur, minorem vero minimam. Aliarum autem propinquiorem maximæ, maiorem eſſe remotiore. *Lem. 3.*

*Excipio autem ſemicirculos ſe inuicem ſecantes, in quibus centrum V idem eſt quod punctum A, quoniam in ijs non datur minima, propinquior enim puncto ſectionis, remotiori ex eadem parte ſemper minor eſt, vt infra demonſtrabimus.*

Iungantur igitur G K K D, quibus parallelæ ducãtur C Y Y X ſecantes A K F A etiã continuatas in punctis Y X. Et ſit exiſtẽte centro V inter puncta A F, recta A I non minor maiore rectarum A F A K. Vel exiſtente eodem centro inter puncta A D, ſit AI non maior minore rectarum A F AK. Ergo primo caſu A F maior * erit quã A R vnde A I non minor * quàm A F ex poſitione. Secundo caſu A F minor erit quam A K, & A I non maior quàm A F ſimiliter ex poſitione. Itaque vtroque caſu A K maior * erit quàm F C. Oſtendendum eſt igitur A K maximam eſſe F C minimam, atque propinquiorem ipſi A K remotiore maiorem eſſe. *8. Tertij. Lem. 17. In ſemicirculis autem ſe inuicem tangentibus in quibus punctum F idem eſt, quod ſ un ctũ C. ... tis eſt oſtẽ*

Ducatur enim per A vtcunque recta Linea A E B ſecans circumferentias ABC K F in punctis B E, & compleatur circulus D E F H, quem K A E A productæ ſecent in punctis R K, & iungatur G H, cui parallela ducatur C S ſecans A B etiam continuatam in S. Duo igitur rectangula Y A K E A S æqualia * erunt: quare vt A K hoc eſt A R ad A E ità erit A S ad A Y, exiſtente quidem centro V inter

ter

Digitized by Google

*eſſere A K* ter puncta A F, ſic argumentor. Sed A R minor eſt quam A E, *aximã* ergo & A S minor erit quam A Y. Et quoniam A I ponitur non *pr e eique* minor quam A F, ea maior erit quam A K, & conſequenter mi- *re opinquio* nor quam A Y, rectangulum enim Y A K æquale eſt quadrato *ri m remo* A I. Cum igitur A I minor ſit quam A Y, erit & A F minor, & *io ere ma* per conſequens minor & A E, atque A R multo minor, ſic *rẽ eſſe.* igitur quatuor proportionalium A R A E A S A Y maxima *Lem. 8.* erit A Y, minima * vero A R, Vnde Y R maior erit quàm S E, *25. Quin ti.* compoſita enim ex maxima, & minima maior eſt* quàm compoſita *Lem. 7.* ex reliquis, ſimiliter, & differentia maximæ & minimæ maior* quam differentia reliquarum.

Exiſtente vero centro V inter A D argumentor hoc modo. Sed *7. Tertij.* A R maior* eſt quàm A E, ergo & A S maior erit quàm A Y. Et quoniam A I non eſt maior quàm A F, ſic enim ponitur, ea minor erit quàm A K, vnde maior quàm A Y, rectangulum enim Y A K æquale eſt quadrato A I. Ergo & A F maior erit quam A Y, & conſequenter maior & A E, atque A R multo maior. Itaque quatuor proportionalium A R A E A S A Y minima erit A Y, maxi- *Lem. 8.* ma* A R. Ergo Y R maior * erit quam S E, atque hoc idem demon- *25 Quin. & Le. 7.* ſtrauimus exiſtente centro Circuli D E F inter A F.

Et quoniam in vtroque caſu eſt vt A G ad A C ita * A K ad A Y, *Lem. 6.* & ita* E B ad B S, erit A K hoc eſt A R ad A Y vt E B ad B S, & exiſtente A inter Y R erit conuertendo & componendo, exiſtente vero R inter A Y, erit conuertendo & diuidendo, at exiſtente Y inter A R erit per conuerſionem rationis & conuertendo vt Y R ad A R ita S E ad E B, ſed Y R oſtenſa eſt maior quam S E, ergo & A R hoc eſt A K maior erit quàm E B. Et ſic demonſtrabitur omnibus alijs maior. Maxima eſt igitur omnium A K.

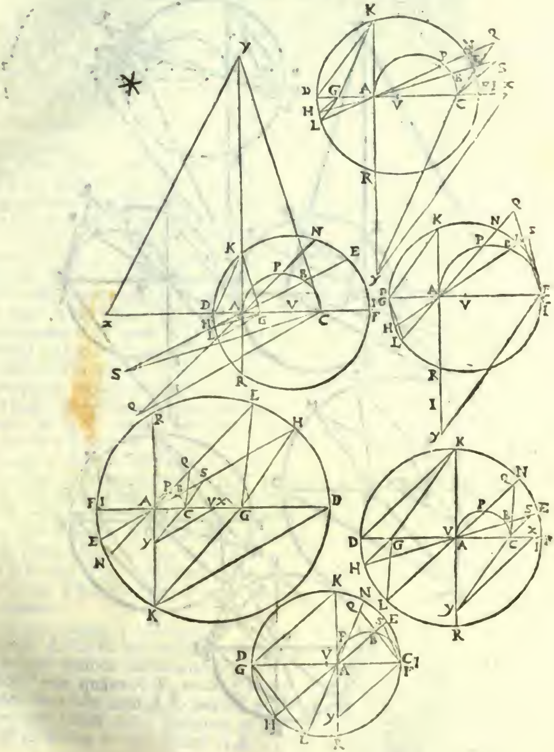
*Corol.* Pari ratione quoniam æqualia * ſunt rectangula E A S F A X, erit *Lem. 6.* E A ad A F vt A X ad A S. Exiſtente quidem centro V inter A F hac ratione argumentor. Sed A E minor eſt quàm A F ergo & A X minor erit quàm A S, & quoniam A I ponitur non minor quàm A F, ea maior erit quam A E, vnde minor quam A S, quia re- *Lem. 6.* ctangulum E A S æquale * eſt quadrato A I; ergo & A F minor erit quam A S, & A E multo minor. Itaque quatuor proportionalium *25 Quin. & Le. 7.* E A A F A X A S maxima erit A S, minima A E. Quare S E maior * erit quàm X F.

Exiſtente vero centro V inter A D, ſic argumentor. Sed A E maior eſt quàm A F, ergo & A X maior erit quàm A S. Et quoniam A I non eſt maior quàm A F, ea minor erit quàm A E, Ergo maior *Lem. 6.* quam A S, rectangulum enim E A S æquatur * quadrato A I, quare & A F maior erit quam A S, & A E multo maior. Quatuor igi- *25. Quin & Le. 7.* tur proportionalium E A A F A X A S minima erit A S, maxima A E; vnde S E maior * erit quã X F. Idẽque in ſuperiori caſu demonſtrauim⁹.

Quoniam

## LIBER SECVNDVS.

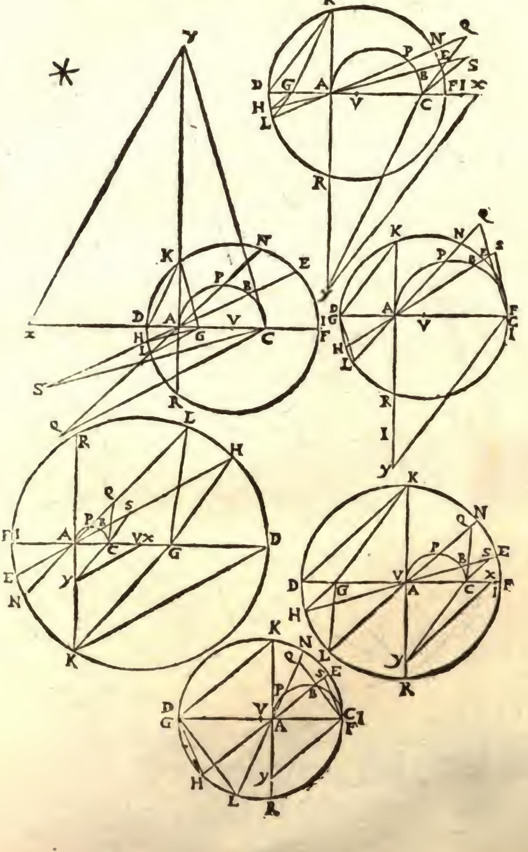
*Figuræ ponendæ inter paginas* 40. & 41.



Digitized by Google

# APOLLONII REDIVIVI

*Figuræ ponendæ inter paginas 40. & 41.*



Digitized by Google

Quoniam igitur vtroque caſu eſt vt A G ad A C ita*F C ad C X
& ita * E B ad BS, erit E B ad B S vt F C ad C X, & exiſtente B *Lem.6.*
inter S E, erit conuertendo & componendo, exiſtente vero E inter
S B erit conuertendo & diuidendo, exiſtente denique S inter E B
erit per conuerſionem rationis & conuertendo vt S E ad E B ita
X F ad F C, ſed S E oſtenſa eſt maior quàm X F, ergo & E B maior
erit quam F C. Atque eadem ratione quæuis alia demonſtrabitur
maior quàm F C. ergo minima eſt F C.

Iam agatur per A vtcunque recta linea A P N ſecans circumferentias
A B C K F in punctis P N, circumferentiam vero D R in L.
ſitque N P maximæ A K propinquior quàm E B, & conectatur G L
eique parallela ducatur C Q ſecans L N, vel ei continuatæ occurrens
in Q. Erunt igitur æqualia * rectangula N A Q E A S; quare vt *Cor.Le.6*
A N ad A E ita erit A S ad A Q. Si quidem centrum V ſit inter
A F ſic argumentabor. Sed A N minor eſt quàm A E, Ergo & A S
minor erit quàm A Q. Et quoniam A I ponitur nõ minor quàm A F,
ea maior erit quàm A N, & per conſequens maior quàm A Q. (rectangulum
enim N A Q æquale * eſt quadrato A I) ergo & A F minor *Lem.6.*
erit quàm A Q, & A E multo minor, atque minor & A N. Quatuor
igitur proportionalium A N A E A S A Q maxima erit A Q
minima * vero A N. Vnde Q N * maior erit quàm S E. *Lem 8.*

Si vero centrum V ſit inter A D argumentabor hoc modo. Sed *11.Quin.*
A N maior eſt quàm A E, ergo, & A S maior erit quàm A Q. Et *& Le.7.*
quoniam A I ponitur non maior quàm A E, ea minor erit quàm A N,
ergo maior quàm A Q (rectangulum enim N A Q æquale *eſt quadrato
A I) quare & A F minor erit quàm A S, & A E multo minor, *Lem.6.*
atque minor & A N. Itaque quatuor proportionalium A N A E
A S A Q minima erit A Q, maxima A N. Vnde Q N maior erit * *11.Quin.*
quàm S E, quod demonſtrauimus & ſupra. *& Le.7.*

Quoniam igitur vtroque caſu vt A G ad A C ita * eſt N P ad *Lem.6.*
P Q, & ita E B ad B S, erit N P ad P Q vt E B ad B S, & exiſtente
P inter N Q, erit conuertendo & componendo, exiſtente vero N inter
P Q erit conuertendo & diuidendo, exiſtente denique Q inter
N P erit per conuerſionem rationis, & conuertendo, vt Q N ad N P
ita S E ad E B, ſed Q N oſtenſa eſt maior quàm S E, ergo & N P
maior erit quàm E B, hoc eſt propinquior maximæ maior quàm E A
quæ eſt remotior.

Sed, exiſtente centro V inter puncta A F, ſit A I non maior minore
rectarum A F A K. Vel exiſtente eodem centro inter A D, ſit
A I non minor maiore rectarum A F A K. Primo igitur caſu
A K minor * erit quàm A F, vnde A I non maior quàm A K, *7. Tertij.*
ex poſitione. Secundo caſu A K maior erit * quàm A F; ergo *7.Tertij.*
A I non minor quam A K, Similiter ex poſitione. Vtroque igitur
caſu F C maior * erit quàm A K. Itaque oſtendendum *Lem.18.*

F eſt

Digitized by Google

eſt FC maximam eſſe, AK minimam, aliarum autem propinquiorem ipſi FC maiorem eſſe remotiore.

Ducatur enim per A vtcunque recta Linea ABE ſecans circumferentias ABC KF in punctis BE, & compleatur circulus DEFH quem KA EA continuatæ ſecent in punctis RH, & conectatur GH, eique parallela agatur CS ſecans EH, vel ei continuatæ oc- *Corol. Lem. 6.* currens in S. Aequalia* igitur erunt rectangula FAX EAS, quare vt AF ad AE ita erit AS ad AX. Si quidem centrum V ſit inter *7. Tertij.* AF hoc modo argumentor; Sed AF maior* eſt quam AE. Ergo & AS maior erit quàm AX.

Et quoniam AI ponitur non maior quàm AK, ea minor erit quàm AF, & conſequenter maior quàm AX, rectangulum enim *Lem. 6.* FAX æquale* eſt quadrato AI. Cum igitur AI maior ſit quàm AX, erit & AK maior atque AE multo maior, & per conſequens maior & AF quatuor igitur proportionalium AF AE AS AX *Lem. 8.* minima erit AX, & conſequenter maxima* AF, vnde XF maior* *25. Quin.* erit quàm SE.

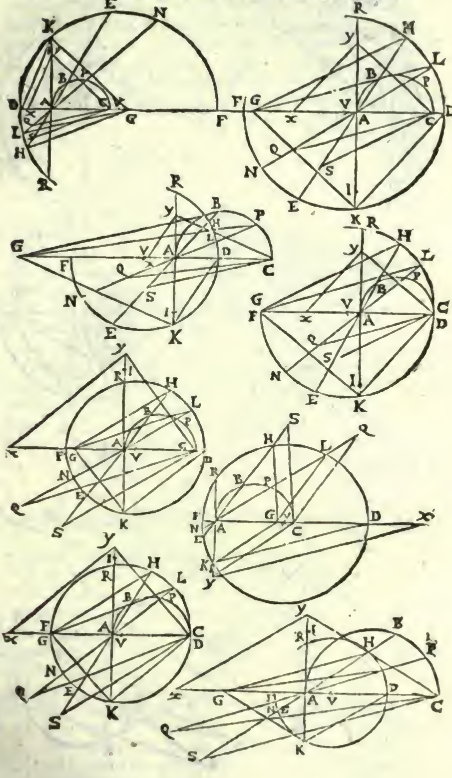
*& Le. 7.* Si vero centrum V ſit inter AD argumentor in hunc modum. Sed AF minor eſt quàm AE, ergo & AS minor erit quàm AX. Et quoniam AI ponitur non minor quàm AK, ea maior erit quam AF; Vnde minor quàm AX, propter quod rectangulum FAX æ- *Lem. 6.* quatur* quadrato AI. Cum igitur AI minor ſit quàm AX, erit minor & AK, & AE multo minor, & per conſequens minor & AF. Sic igitur quatuor proportionalium AF AE AS AX maxi- *Lem. 8.* ma erit AX, vnde* minima AF. atque adeò XF maior erit quàm SE, quod quidem demonſtrauimus & ſuperiori Caſu.

Quoniam igitur in vtroque caſu vt AG ad AC ita eſt FC ad CX, & ita EB ad BS, erit vt FC ad CX ita EB ad BS, & exiſtente C inter XF, erit conuertendo & componendo, exiſtente vero F inter XC erit conuertendo & diuidendo, at exiſtente X inter FC, erit per conuerſionem rationis & conuertendo, vt XF ad FC SE ad EB, ſed maior eſt XF quàm SE, ſic demonſtrauimus; ergo & FC maior erit quàm EB. Et ſic demonſtrabitur maior quacunque alia. Maxima eſt igitur FC.

*Corol.* Aequę quoniam æqualia* ſunt rectangula EAS YAK, erit vt *Lem. 6.* AE ad AK, hoc eſt ad AR ita AY ad AS, exiſtente quidem centro V inter AF, ſic argumentor. Sed AE, maior eſt quàm AK hoc eſt quàm AR, Ergo & AY maior erit quàm AS. Et quoniam AI non eſt maior quàm AK ex poſitione, ea minor erit quàm AE, *Lem. 6.* ergo maior quàm AS, rectangulum enim EAS æquatur* quadrato AI. Cum igitur AI maior ſit quàm AS, erit & AR maior, atque AE multo maior. Itaque quatuor proportionalium AE AR *Lem. 8.* AY AS minima erit AS, & per conſequens maxima* AE. vnde *25. Quin. & Le. 7.* SE maior* erit quàm YR.

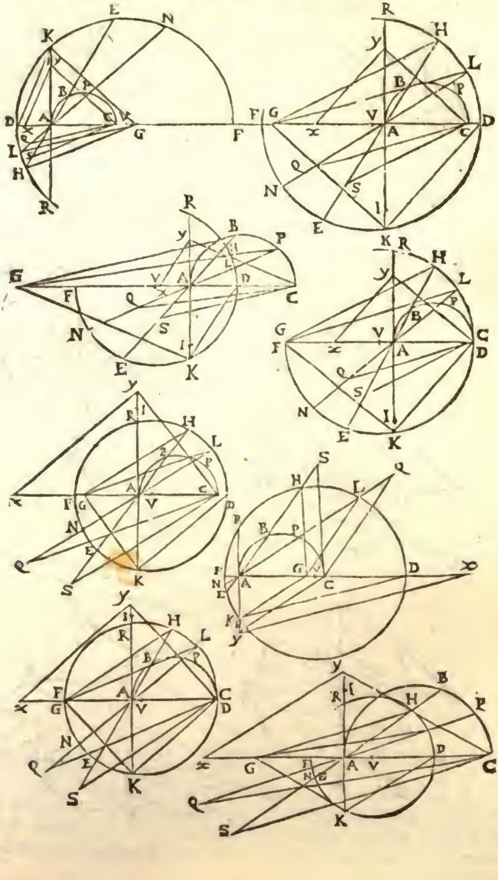
Exi-

*Figuræ collocandæ inter paginas 42. & 43.*



Digitized by Google

*Figuræ collocandæ inter paginas 42. & 43.*



Digitized by Google

Exiſtente vero centro V inter A D, ſic argumentor. Sed A E minor * eſt quàm A K, hoc eſt quam A R, ergo & A Y minor erit quam A S. Et quoniam A I non eſt minor quam A K, ſic ponitur, ea maior erit quam A E, vnde minor quam A S, quia rectangulum E A S æquatur * quadrato A I. Cum itaque A I minor ſit quam A S, erit minor & A R, atque A E multo minor. Quatuor igitur proportionalium A E A R A Y A S maxima erit A S, vnde minima * A E, quare S E maior erit quam Y R. Atque hoc idem demonſtrauimus & ſupra. *7. Tertij.* *Lem.6.* *Lem.8.*

Quoniam igitur in vtroque caſu vt A G ad A C ita * eſt E B ad B S, & ita * A K ad A Y, erit vt E B ad B S ita A K ad A Y, & exiſtente B inter E S, erit conuertendo & componendo, exiſtente vero E inter S E, erit conuertendo & diuidendo, at exiſtente S inter E B, erit per conuerſionem rationis & conuertendo vt S E ad E B ita Y R ad A R, hoc eſt ad A K, Sed S E oſtenſa eſt maior quam Y R, ergo & E B quàm A K maior erit. Eademque ratione demonſtrabitur quæcunque alia maior, quam A K. Minima eſt igitur A K. *Lem.6.*

Poſtremo ducatur per A quæuis recta linea A P N ſecans circumferentias A B C K F in punctis P N, circumferentiam vero D R in L, ſitque N P ipſi F C propinquior quam E B, & conectatur G L cui parallela ducatur C Q ſecans N A, vel ei continuatæ occurrens in Q. Duo igitur rectangula N A Q E A S æqualia * erunt, & ob id vt A N ad A E ita erit A S ad A Q. Exiſtente quidem centro V inter A F, ita argumentor. Sed A N maior * eſt quam A E, ergo & A S maior erit quam A Q. Et quoniam A I non eſt maior quam A K, ſic enim ponitur, ea minor erit quam A N, & per conſequens maior quam A K, rectangulum enim N A Q æquatur * quadrato A I. Cum igitur A I maior ſit quam A Q, erit A E multo maior, & multo maior A N. Sic igitur quatuor proportionalium A N A E A S A Q minima erit A Q, maxima * vero A N. atque adeo Q N maior * erit quàm S E. *Corol. Lem.6.* *Lem.6.* *Lem.8.* *25. Quin. & Le.7.*

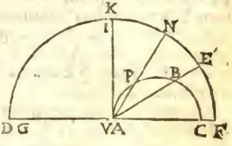
Exiſtente verò centro V inter A D, hoc vtor argumento. Sed A N minor eſt quàm A E, ergo & A S minor erit, quàm A Q. Et quoniam A I ponitur non minor quàm A K, ea maior erit quàm A N; vnde minor quàm A Q (quoniam rectangulum N A Q æquatur * quadrato A I) ergo & A E, quàm A Q minor erit, & A N multo minor. Itaque quatuor proportionalium A N A E A S A Q maxima erit A Q, minima * verò A N, vnde Q N maior * erit quàm S E, quod etiam demonſtrauimus, & ſupra. *Lem.6.* *Lem.8.* *25. Quin. & Le.7.*

In vtroque igitur caſu quoniam eſt vt A G ad A C ita N P ad P Q, & ita E B ad B S, erit N P ad P Q vt E B ad B S, & exiſtente P inter Q N, erit conuertendo, & componendo, exiſtente vero N inter Q P, erit conuertendo & diuidendo, at exiſtente Q inter P N, erit per conuerſionem rationis & conuertendo vt Q N ad

F 2 NP ita

Digitized by Google

N P ita S E ad E B, ſed QN maior eſt quam S E, ſic demonſtrauimus, ergo & N P quam E B maior erit, hoc eſt propinquior maximæ F C maior quam ea quæ eſt remotior.

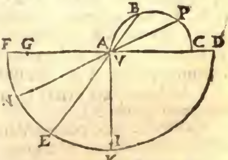



Sed centrum V iam ſit in puncto A, ergo æquales erunt A G A C, ſed vt A G ad A C ita ponitur quadratum A K ad quadratum A I, ergo quadratum A K quadrato A I æquale erit; quare & recta A K vel A F æqualis rectæ A I. Igitur & is caſus ad præſens Lemma pertinet, ponitur enim A I vel non minor maiore rectarum A F A K, vel non maior minore. Oſtendendum eſt igitur maiorem ipſarum A K F C maximam eſſe, minorem vero minimam, atque propinquiorem maximæ maiorem eſſe remotiore.

In ſemicirculis enim ex eadem parte exiſtentibus A K cui æqualis eſt A F maior eſt quam F C, eademque ratione maior quam E B. Et ſic maior quacunque alia. Maxima eſt igitur A K.

Et quoniam æquales ſunt A F A E, maior autem A C quam A B, erit reliqua F C minor quam reliqua E B. eademque ratione demonſtrabitur omnibus alijs minor. Ergo minima eſt F C.

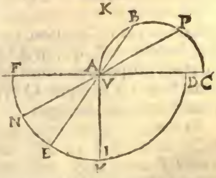
Aeque quoniam æquales ſunt A N A E, minor autem A P quam A B, erit reliqua N P maior quam reliqua E B, propinquior nempè maximæ maior quam ea quæ eſt remotior.




In ſemicirculis vero ex oppoſito exiſtentibus A F æqualis eſt A E, A C vero maior quam A B, tota igitur F C maior erit quam E B tota. Itaque maxima eſt F C.

Similiter A K cui æqualis eſt A E minor eſt quã E B. Ergo minima eſt A K.

Poſtremo, quoniam A N æqualis eſt A E, A P vero maior quam A B, erit tota N P maior quam I B tota, hoc eſt propinquior maximæ maior quam remotior. Maior igitur rectarum A K F C maxima eſt omnium quæ inter circumferentias A B C K F interijciuntur, minor vero minima, aliarum autem propinquior maximæ maior remotiore, quod erat oſtendendum.

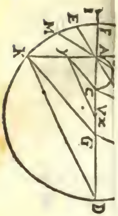



At verò in ſemicirculis ſe inuicem ſecantibus in quibus centrum V idem eſt quod punctum A, propinquiorem puncto ſectionis ſemicirculorum, quod ſit M minorem eſ-

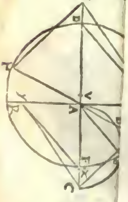
ſe

ſe remotiore ex eadẽ parte ſic demõ-
ſtrabimus. Ducantur AB A P ſecan-
tes circumferentias MF MC in pũctis









em.6.

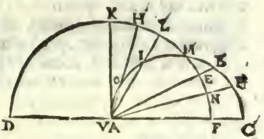
Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

Digitized by Google

N P ita S E ad E B, ſed QN maior eſt quam S E, ſic demonſtrauimus, ergo & N P quam E B maior erit, hoc eſt propinquior maximæ F C maior quam ea quæ eſt remotior.

S
erg
A C
A K
tum
qua
rect
Ler
vel
A K
rum
pin
In
eſt
ſic n
E
erit
ſtral
A
A B
max
In
ſtem
ro n
mai
xima
Si
min
Po
AE,
ta N
prop
mot
max
ferer
nor
pinq
quod
A
ſecar
quio

ſe remotiore ex eadē parte ſic demōſtrabimus. Ducantur AB A P ſecantes circumferentias MF MC in pūctis EN B P & ſit EB puncto M propinquior quàm N P. Qm̄ igitur AB minor eſt quā AP, AE vero ęqualis AN, reliqua EB minor erit quàm reliqua NP, hoc eſt propinquior puncto M minor quàm ea quæ eſt remotior.




Rurſus ducantur AH AL ex altera ſectionis parte ſecantes circumferentias MK MA in punctis HL OI, & ſit IL puncto M propinquior quàm OH. Eadem ratione AI maior eſt quàm AO, & AL æqualis A N, erit reliqua I L minor quàm O H reliqua, hoc eſt propinquior puncto ſectionis minor remotiore, quod erat oſtendendum.

# Lemma XX.

Iiſdem poſitis. Sit autem A I minor maiore rectarum A F A K, maior minore. Ergo à puncto A ad circumferentiam K F ducatur A M æqualis AI, eaque producatur ad circumferentiam ABC in O. Dico maiorem rectarum A K F C maximam eſſe omnium quæ per A ductæ inter circumferentias ABC KF interijciuntur, minimam vero M O Aliarum autem propinquiorem minimæ, remotiore ex eadem parte minorem eſſe.

Ducatur enim per A quæcunque recta linea ABE ſecans circumferentias ABC KF in punctis B E, & compleatur circulus DEFH, quem E A K A continuatæ ſecent in punctis H R, & conectantur GH GK KD, eiſque parallelæ ducantur C S CY YX ſecantes EA KA FA etiam productas in punctis SYX. Et ſit primum AK maior quam FC. Quoniam igitur vt AG ad AC ita*eſt A K ad A Y, & ita* FC ad CX, erit AK hoc eſt AR ad AY vt FC ad CX, & exiſtente puncto A inter YR, erit conuertendo & componēdo ac rurſus conuertendo, exiſtente vero R inter AY, erit conuertendo & diuidendo & rurſus conuertendo, at exiſtente Y inter AR, erit per conuerſionem rationis, vt AR ad RY ita F C ad X F, ſed AR, hoc eſt AK ponitur maior quàm F C. Ergo & RY quàm XF maior erit. *Lem.6.*

Et quoniam rectangulum Y A K, hoc eſt Y A R æquale * eſt rectangulo F A X * proportionales erunt A R A F A X A Y, ſed RY *Cor Le.6.* *16.ſexti.*

oſtenſa

oſtenſa eſt maior quàm X F, hoc eſt compoſita ex extremis maior
quàm compoſita ex medijs, vel differentia extremarum maior quàm
*Lem. 9.* differentia mediarum, ergo altera * extremarum A R A Y maxima
*& Le. 10* erit, altera minima. Exiſtente quidem centro V inter A F ſic argu-
mentor. Sed AR non eſt maxima, quia * minor eſt quam A F. Ergo
*7. Tertij.* *Lem. 8.* minima erit, & conſequenter AY * maxima. Itaque AY maior erit
quàm AF, & multo maior quàm AE.

*Corol.* Et quoniam propter * æqualitatem rectangulorum YAK EAS eſt
*Lem. 6.* vt AK ad AE, minor videlicet ad maiorem ita AS ad AY, erit
& AS minor quàm AY, ſeu quod idem valet AY maior quàm AS.
Cum igitur AY maior ſit quam AS, & maior quàm AE, ac etiam
maior quàm AK vt demonſtrauimus, erit ipſa AY maxima quatuor
*Lem. 8.* proportionalium AK AE AS AY, vnde AK * minima. Quare RY
*25 Quin.* *& Le. 7.* * maior erit quam SE.

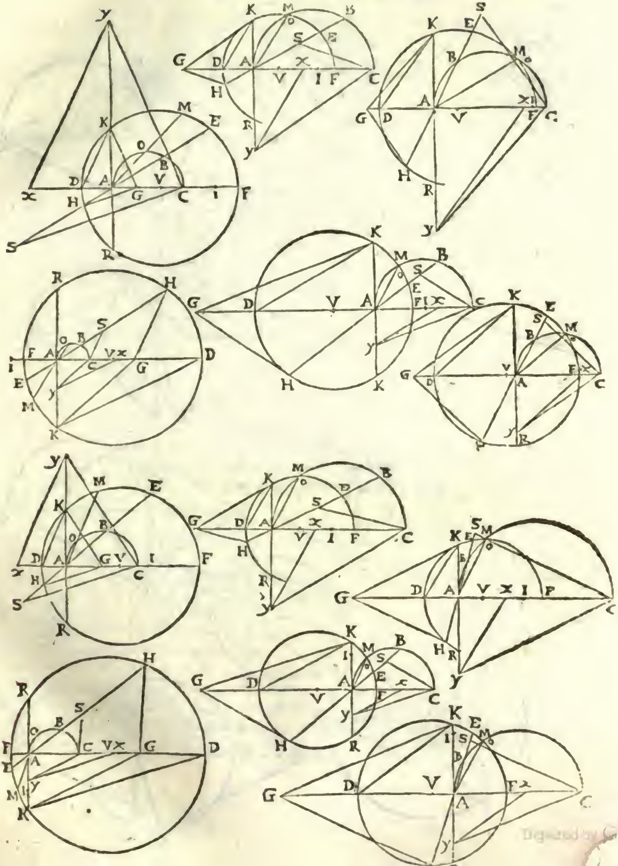
Exiſtente vero centro V inter AD argumentor hoc modo. Sed
*7. Tertij.* AR non eſt minima, eſt enim maior * quàm AF, ergo maxima
*Lem. 8.* erit, vnde AY * minima. Itaque AY minor erit quàm AF, & ideò
multo minor quàm AE.

*Corol.* *Lem. 6.* Et quoniam æqualia * ſunt rectangula YAK EAS, erit vt AK
*7. Tertij.* ad AE, maior * videlicet ad minorem, ita AS ad AY, ergo & AS
maior erit quàm AY, ſeu quod idem eſt AY minor quam AS.
Cum igitur AY minor ſit quàm AS, & minor quàm AE, & etiam
minor quàm AK, vt eſt demonſtratum. Erit ipſa AY minima qua-
*Lem. 8.* tuor proportionalium AK AE AS AY, quare AK * maxima,
*25 Quin.* vnde YR maior * erit quàm SE, quod ēt demonſtrauimus & ſupra.
*& Le. 7.* In vtroque igitur caſu quoniam eſt vt AG ad AC ita * AK ad AY,
*Lem. 6.* & ita * EB ad BS, erit AK, hoc eſt AR ad AY ſicut EB ad BS, & exiſten
te A inter YR, erit conuertendo & componēdo, exiſtente vero R inter
AY, erit conuertēdo & diuidēdo, at exiſtente Y inter AR erit per con
uerſionem rationis & conuertendo, vt RY ad AR, hoc eſt ad AK
ità SE ad EB, ſed RY oſtenſa eſt maior quàm SE, ergo & AK
quàm EB maior erit. Eademque ratione demonſtrabitur omnibus
alijs maior. Maxima eſt igitur AK.

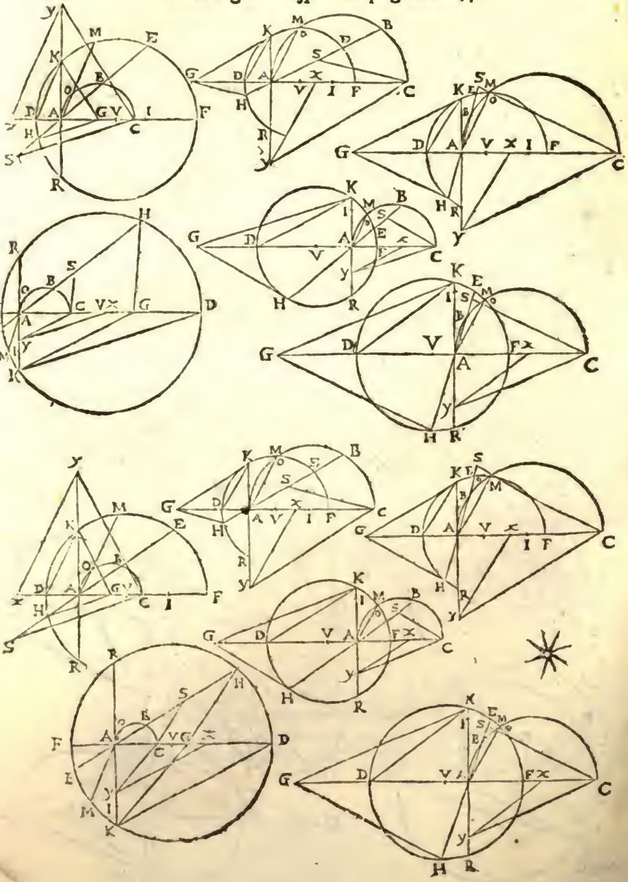
Sed ſit FC maior quam AK, quoniam igitur vt AG ad AC
*Lem. 6.* ita * eſt FC ad CX, & ita * AK ad AY, erit FC ad CX vt AK
hoc eſt AR ad AY, & exiſtente A inter YR, erit conuertendo
& componendo & rurſus conuertendo, exiſtente vero R inter AY
erit conuertendo & diuidendo & rurſus conuertendo, at exiſtente Y
inter AR erit per conuerſionem rationis, vt FC ad XF ita AR
ad RY, ſed ponitur FC maior quam AR, hoc eſt quam AK, er-
go & XF maior erit quam RY, ſed XF compoſita eſt ex extremis
quatuor proportionalium AF AY AR AX, ipſa vero RY ex me-
dijs, vel XF differentia eſt extremarum, RY differentia mediarum
(ſunt enim proportionales AF AY AR AX, quia rectangulum

FAX

*Ponatur hoc folium inter paginas 46. & 47.*
*Et Figuræ reſpiciant paginam 46.*



*Ponatur hoc folium inter paginas 46. & 47.*
*Et hæ Figuræ reſpiciant paginam 47.*



FAX * æquatur rectangulo Y A K hoc eſt Y A R. ) Igitur altera Cor.Le.6.
extremarum A F A X maxima*erit, altera minima. Exiſtente qui- Lem.9.
dem centro V inter A F hac ratione argumentor. Sed A F non & Le.10.
eſt minima, quia maior*eſt quam A R, ergo maxima erit, vnde A X 7 Tertij.
*minima. Itaque A X minor eſt quàm A R, & multo minor quàm Lem 8.
A E. Et quoniam eſt, vt A F ad A E maior videlicet ad minorem Corol.
ita A S ad A X, ſunt enim æqualia*rectangula F A X E A S, er- Lem.6.
go & A S maior erit quàm A X, hoc eſt A X minor quam A S,
ſed & A X vt demonſtrauimus minor eſt quàm A E, & conſequen-
ter minor etiam quam A F, ergo quatuor proportionalium A F A E
A S A X minima erit A X, vnde* A F maxima. Quare X F ma- Lem.8.
ior*erit quam S E. 21.Quin.

Exiſtente vero centro V inter A D, hoc modo argumentor. Sed & Le.7.
A F non eſt maxima, quia minor*eſt quàm A K. Ergo minima erit, 7.Tertij.
& per conſequens maxima A X. Itaque A X maior erit quam A K,
& multo maior quam A E. Et quoniam propter æqualitatem*re- Corol.
ctangulorum F A X E A S proportionales ſunt A F A E A S A X, Lem.6.
& eſt A F minor*quàm A E, ergo & A S minor erit quam A X, 7.Tertij.
ſeu quod idem eſt A X maior quam A S, ſed A X oſtenſa eſt quo-
que maior quàm A E, & per conſequens maior quoque quàm A F.
Ergo quatuor proportionalium A F A E A S A X maxima eſt A X,
vnde minima * A F. Itaque X F maior erit quàm S E. Atque hoc Lem 8.
idem demonſtrauimus & ſupra. 21.Quin.

Itaque in vtroque caſu quoniam eſt vt A G ad A C ita*F C ad & Le.7.
C X & ita*E B ad B S, erit F C ad C X vt E B ad B S, & exiſtente Lem 6.
C inter F X, erit conuertendo & componendo, exiſtente vero F in-
ter X C, erit conuertendo & diuidendo, at exiſtente X inter F C,
erit per conuerſionem rationis & conuertendo vt X F ad F C ita
S E ad E B, ſed oſtenſa eſt X F maior quàm S E, Ergo & F C maior
erit quam E B. Similiter demonſtrabitur omnibus alijs maior. Er-
go maxima eſt F C.

Sed ſint æquales A K F C. Qm̄ igitur vt A G ad A C ita*eſt F C ad Lem.6.
C X, & ita A K ad A Y, erit F C ad C X vt A K hoc eſt A R ad A Y, ſed
F C ponitur æqualis A R, vel A K, ergo & C X æqualis erit ipſi
A Y; quare per additionem, vel ſubductionem æqualium æqualibus
erit X F æqualis Y R, ſed X F compoſita eſt ex extremis quatuor
proportionalium F A A Y A R A X, ipſa vero R Y ex medijs, vel
X F differētia eſt extremarum, R Y differentia mediarū, ſunt enim
propter æqualitatem*rectangulorum F A X Y A K hoc eſt Y A R Corol.
proportionales*F A A Y A R A X, ergo A F A X ipſis A Y A R Lem.6.
æquales*erūt, maior videlicet maiori, minor minori, Itaque A F æqua- 16.Sexti.
lis erit alteri ipſarum A Y A R, ſed exiſtente centro V inter pun- Lem.11.
cta A F, ipſa A F maior eſt quam A R, Ergo A F æqualis erit ip-
ſi A Y, atque adeò A Y maior quàm A E. Et quoniam æqualia
ſunt

Digitized by Google

ſunt rectangula YAK EAS, erit AY ad AE, maior videlicet ad minorem, vt AS ad AK, hoc eſt ad AR, ergo & AS maior erit quam AR, ſed & AY maior eſt quam AR, ſimiliter maior & AE,
*Lem.8.* ergo quatuor proportionalium AY AE AS AR minima erit AR,
*25.Quin.* & conſequenter maxima * AY; Vnde RY maior * erit quam SE.
*& Le.7.* Exiſtente vero centro V inter puncta AD, erit AF minor quam AR, ergo æqualis erit ipſi AY, oſtenſa enim eſt AF æqualis alteri ipſarum AY AR, Itaque AY minor erit quam AE. Et quoniam,
*Co. 21.6.* propter æqualitatem * rectangulorum YAK EAS, eſt vt * AY ad
*16.Sexti.* AE, minor videlicet ad maiorem, ita AS ad AK, vel ad AR, ergo & AS minor erit quam AR, ſed & vtraque ipſarum AY AE mi-
*25.Quin.* nor eſt quam AR. Ergo quatuor proportionalium AY AE AS
*& Le.7.* AR maxima erit AR, vnde minima AY, quare RY maior erit quam SE. Atque hoc idem demonſtrauimus & ſupra.

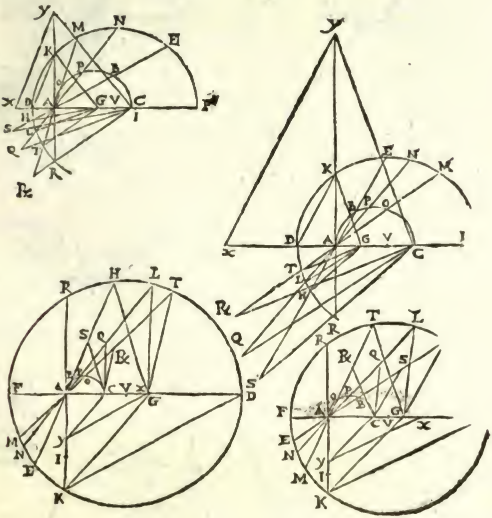
*Lem.6.* Quoniam igitur in vtroque caſu vt AG ad AC ita * eſt EB ad BS, & ita * AK ad AY, erit AK hoc eſt AR ad AY vt EB ad BS, & exiſtente A inter RY, erit conuertendo & componendo, exiſtente vero R inter AY erit conuertendo & diuidendo, exiſtente denique Y inter AR, erit per conuerſionem rationis & conuertendo vt RY ad AR hoc eſt ad AK ita SE ad EB, ſed RY oſtenſa eſt maior quam SE, ergo & AK quam EB maior erit. Atque eadem ratione demonſtrabitur maior omnibus alijs. Cum igitur AK maior ſit omnibus per A ductis, & ei æqualis ſit FC, erit & ipſa FC omnibus maior, & ideo vtraque maxima. Maior igitur rectarum AK FC maxima eſt omnium, quæ per A ductæ inter circumferentias ABC KF intreijciuntur quod eſto primum.

Iam vero producatur MA donec ſecet circumferentiam RD in T, & conectatur GT, eique parallela agatur C℞ ſecans MA con-
*Lem.6.* tinuatam in ℞. Rectangulum igitur MA℞ æquale * erit quadrato AI hoc eſt quadrato AM, ſunt enim æquales AI AM ex conſtructione, quare AM æqualis erit ipſi A℞. Sed quoniam rectangu-
*Lem.6.* lum FAX æquale * eſt quadrato AI ſeu quadrato AM, propor-
*17.Sexti.* tionales * erunt AF AM AX, ſunt autem & inæquales, ergo XF compoſita ex extremis maior erit quam dupla media, hoc eſt quam
*Lem.6.* M℞. Et quoniam eſt, vt AG ad AC, ita * FC ad CX, & ita * MO ad O℞, erit FC ad CX vt MO ad O℞, & conuertendo vt CX ad FC ita O℞ ad MO, & componendo vt XF ad FC ita erit M℞ ad MO, ſed oſtenſa eſt XF maior quam M℞, ergo & FC quam MO maior erit.

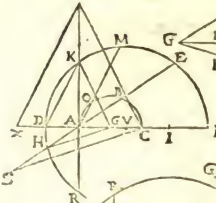
Eadem ratione. Quoniam rectangulum YAK æquale eſt quadrato AI, ideſt quadrato AM, proportionales erunt AK AM AY, ſunt autem & inæquales, ergo RY compoſita ex extremis AK AY
*Lem.6.* maior erit quam M℞, ideſt, quam dupla media. Sed quoniam eſt

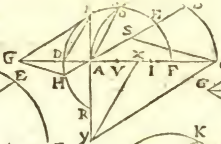
vt AG

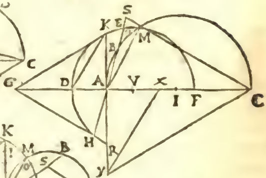
*Ponantur hæ figuræ inter paginas 48. & 49. ita vt paginam 49. reſpiciant.*

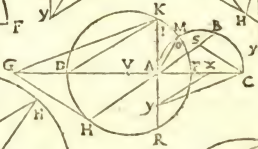


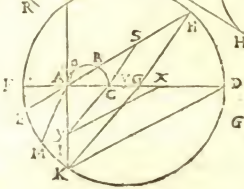
*Ponantur hæ figuræ inter paginas 48. & 49. Ita vt reſpiciant paginam 48.*

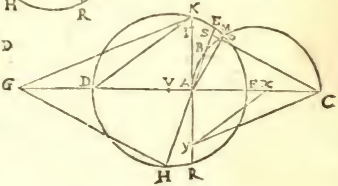


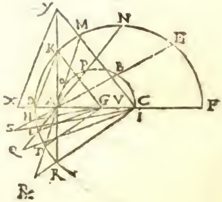


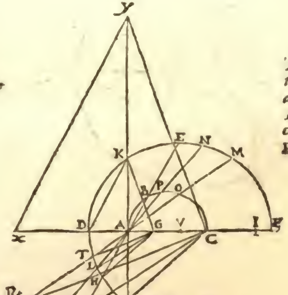




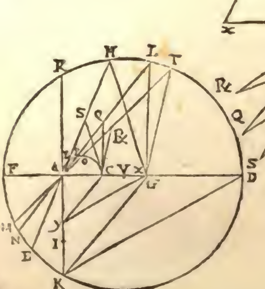


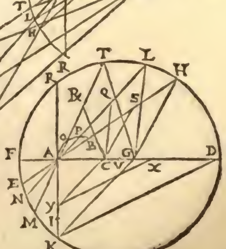






*Hæ inferiores quatuor figuræ pertinent ad Secundam partem Lemmatis XX. incipientem*, Iam verò producatur.





vt A G ad A C ita * A K ad A Y, & ita M O ad O ℞, erit A K, id eſt A R ad A Y ſicut M O ad O ℞, & conuertendo vt A Y ad A R ita O ℞ ad M O, & componendo vt R Y ad A R ita erit M ℞ ad M O, ſed R Y maior eſt quam M ℞ vt demonſtrauimus, ergo & A R hoc eſt A K maior erit quam M O. *Lem. 6.*

Similiter, quoniam rectangulum E A S æquatur * quadrato A I ideſt A M proportionales * erunt A E A M A S, ſed & inæquales ſunt; ergo S E compoſita ex extremis maior erit quam M ℞, media videlicet dupla. Et quoniam vt A G ad A C ita * eſt E B ad B S, & ita * M O ad O ℞, erit E B ad B S vt M O ad O ℞, & conuertendo vt B S ad E B ita O ℞ ad M O, & componendo vt S E ad E B ita erit M ℞ ad M O, ſed maior eſt S E quam M ℞, ergo & E B quam M O maior erit. Atque eadem ratione demonſtrabimus quamcunque aliam maiorem eſſe ipſa M O. Minima eſt igitur M O omnium quæ per A ducuntur, & inter circumferentias A B C K F interijciuntur, quod eſto ſecundum. *Lem. 6.* *17. Sexti.* *Lem. 6.*

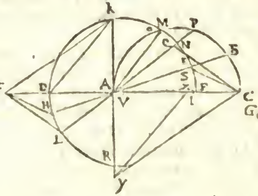
*Et ſi in ſemicirculis ſe inuicem ſecantibus non datur minima, ea enim quæ propinquior eſt puncto ſectionis remotiore ex eadem parte ſemper minor eſt, ſed vt omnibus figuris vna eademque demonſtratio conueniat in ſemicirculis ſe ſe ſecantibus punctum ſectionis vocetur minima.*

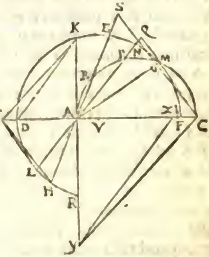
Ducatur ergo per A vtcunque recta linea A N P ſecans circum-

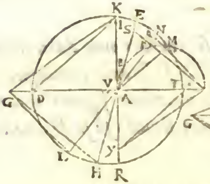


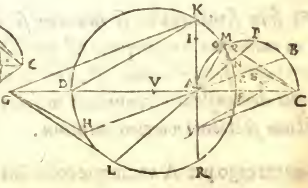
Digitized by Google

ferentias A B C K F in punctis P N ita vt recta NP ſit minimæ M O propinquior quam E B; eaque producta ſecet quoque circemferen-









tiam R D in L, ſintque N P E B ex eadem parte minimæ, & iungatur G L, cui parallela ducatur C Q occurrens N A productæ in Q.
Co Le.6. Erit igitur propter æqualitatem * rectangulorum E A S N A Q. vt
16. Sexti AE ad A N ita * A Q ad A S in ſemicirculis quidem in quibus A E maiori rectarum A F A D propinquior eſt quam A N ſic argumen-
7.Tertij. tor. Sed A E * maior eſt quam A N, ergo & A Q maior erit quam A S. Sed quoniam rectangulum N A Q æquatur quadrato A I hoc eſt quadrato A M, & A N vt propinquior maiori rectarum A F A D
7.Tertij. maior * quam A M, quæ eſt remotior, ergo A N maior erit quam A Q, & per conſequens A E multo maior, atque multo maior quam A S. Sic igitur quatuor proportionalium A E A N A Q A S maxi-
11.Quin. ma erit A E, minima vero A S, vnde S E maior * erit quam Q N.
& Le.7. In ſemicirculis vero in quibus A E à maiore rectarum A F A D re-
7.Tertij. motior eſt quam A N, argumentor hoc modo. Sed A E minor * eſt quam A N, ergo & A Q minor erit quam A S. Sed quoniam re-
Lem.6. ctangulum A N Q æquale * eſt quadrato AI, vel quadrato A M, & A N minor quam A M, ergo ipſa A N multo minor erit quam A Q.

& multo

& multo minor quàm A S, oſtenſa eſt enim A S maior quam A Q. Quatuor igitur proportionalium A E A N A Q A S minima erit A E, maxima A S, vnde S E * maior erit quam Q N. Atque hoc idem demonſtrauimus & ſupra.

25 Quin. vel l. e. 7. Lem 6.

Denique in vtroque caſu quoniam eſt vt A G ad A C ita * N P ad P Q, & ita E B ad B S, erit N P ad P Q vt E B B S, & exiſtente B inter E S erit conuertendo & componendo, exiſtente vero E inter B S erit conuertendo & diuidendo, at exiſtente S inter E B, erit per conuerſionem rationis & conuertendo, vt Q N ad N P ita S E ad E B, ſed minor eſt Q N quàm S E vt demonſtrauimus, ergo & N P quàm E B minor erit. Propinquior igitur minimæ minor eſt remotiore, quod poſtremo loco erat demonſtrandum.

## COROLLARIVM I.

Manifeſtum eſt igitur A K maximam eſſe omnium, quæ inter circumferentias K M A O interijciuntur. Oſtenſum eſt enim propinquiorem ipſi M O remotiore ex eadem parte minorem eſſe, ſed A K remotiſſima eſt omnium, ergo & maxima.

## COROLLARIVM II.

Similiter manifeſtum eſt F C maximam eſſe omnium quę inter circumferentias M F O C interijciuntur. Cum enim propinquior ipſi M O remotiore ex eadem parte oſtenſa ſit minor, ipſa F C quæ remotiſſima eſt omnium, omnium maxima erit.

## PROBLEMA.

Datis duobus ſemicirculis in directum baſes habentibus. Inter eorum circumferentias ponere rectam lineam magnitudine datam, quæ ad vnius ſemicirculorum angulum pertingat.

Oportet autem eam magnitudine datam non eſſe maiorem maxima rectarum linearum, quæ ad ipſum angulum



Digitized by Google

pertingentes inter circumferentias interijciuntur, neque minorem minima. Quæ autem ſit maxima, quæve minima, iam eſt * demonſtratum.

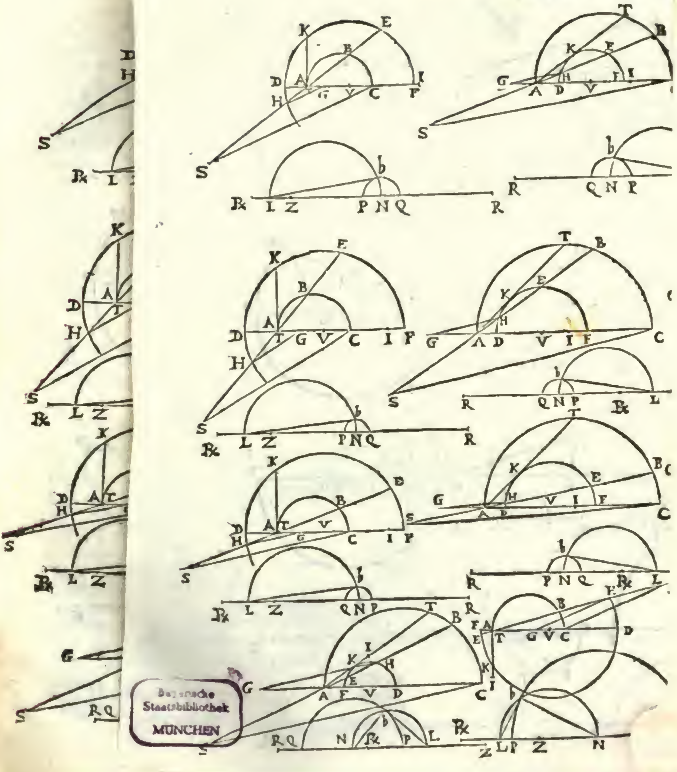
Lem 15. 16 19 & 20. Sint dati duo ſemicirculi ABC DEF in directum baſes habentes AC DF, data autem recta Linea Z ℞, & ducatur A K contingens ſemicirculum DEF in K, ſi punctum A ſit extra baſim ſemicirculi D F, ſi vero ſit in ipſa baſe ducatur A K perpendicularis in D F ſecans circumferentiam D E F in K. Oportet inter circumferentias A B C K F ponere rectam Lineam æqualem Z ℞ datæ, ita vt ad punctum A pertingat. Oportebit autem ipſam Z ℞ non eſſe maiorem maxima rectarum, quæ ad punctum A pertingentes inter circumferentias A B C K F interijciuntur, neque minorem minima.

Primum exiſtant ſemicirculi, vel ex oppoſito, vel alter in altero incluſus, neuter vero alterum tangat, aut ſecet etiam ſi compleantur. Et ſit, vbi alter includitur, F C maior quàm A D. In oppoſitis vero, exiſtente puncto A in baſe D F, ſit minor, exiſtente enim extra, ſit quomodocunque. Producatur A K ad circumferentiam A B C in T. Si igitur Z ℞ data ſit æqualis maximæ, factum iam erit quòd proponebatur, etenim maxima eſt ea, quæ maior eſt rectarum K T F C. Si vero Z ℞ ſit æqualis minimæ, minimaque ſit ea quæ minor eſt ipſarum K T F C, itidem factum erit quod proponebatur. Sin ipſarum minor non ſit minima, inuenta minima, problemati ſatisfiet. Quomodo autem inuenienda ſit minima vide Lemmata 16. & 20. Sed ſi Z ℞ minor ſit maxima maior autem minima ponatur ex centro Circuli D E F, quod ſit V, recta V G æqualis ipſi V C, & Z ℞ ſecetur bifariam in L, & fiat vt * A G ad A C ita quadratum A K ad quadratum A I. Similiter vt A G ad A C ita fiat L Z ad Z N. Et exiſtente puncto A extra baſim ſemicirculi D F, fiat L N differentia rectarum L Z Z N, exiſtente vero in ipſa baſe, fiat L N earundem aggregatum. In ipſa autem L N deſcribatur ſemicirculus, in quo accõmodetur recta LB æqualis AI, eſt enim AI minor quàm LN vt ſequenti Lẽmate demonſtrabimus, & iungatur Nb, & centro N interuallo Nb deſcribatur circulus, quem LN producta ſecet in punctis PQ, & à puncto A ad circumferentiam K F ducatur A E ipſi L P differentiæ vel aggregato rectarum L N N b æqualis. Quo autem caſu L P fiat differentia, quove aggregatum, poſt ſequens Lemma præcepta ponemus, & inde ijs quæ ſequuntur Lemmatibus demonſtrabimus eam rectã poſſe duci. Producta denique vbi opus exigit A E ad circumferentiam A B C in B, facta erit problematis conſtructio. Secet enim B A etiam producta ſemicirculum D E F, aut circulum completum in N, & conectatur G H, cui parallela ducatur C S ſe-

Lem 3. 

cans

*Figuræ Problematis c*

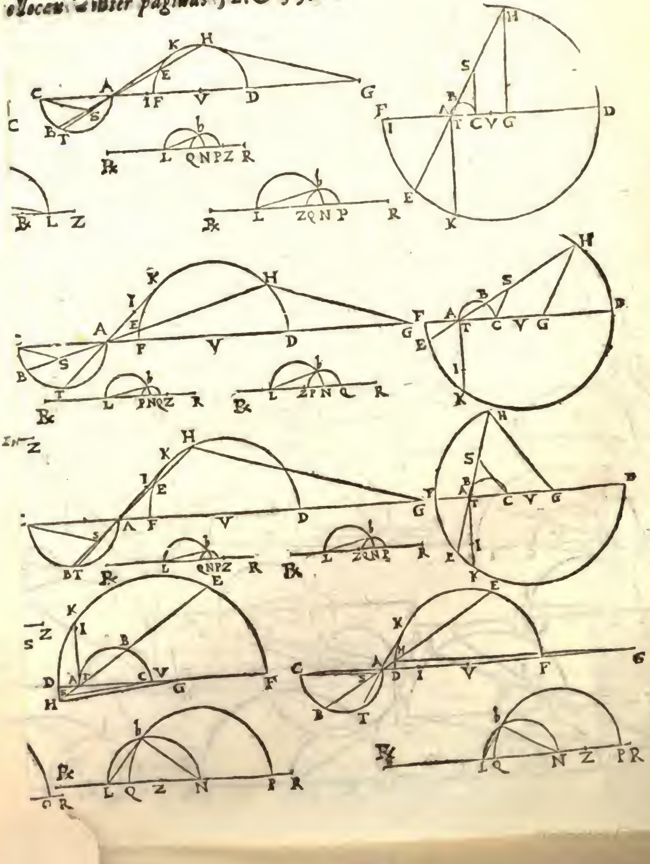


Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

Digitized by Google

# N I S R E D I V I V I

*ollocentur inter paginas 52. & 53.*



cans E A, vel ei continuatæ occurrens in S, & duplicetur L N in R. Quoniam igitur æquales ſunt L N N R, & æquales quoque N Q N P, erunt per æqualium æqualibus additionem, vel ſubductionem æquales & L Q R P.

Et quoniam L G tangit circulum P b Q in b, angulus enim L b N in ſemicirculo rectus eſt, rectangulum P L Q æquale * erit quadrato L b, ſed & rectangulum E A S æquatur * quadrato A I hoc eſt L b, ergo æqualia erunt rectangula E A S P L Q, ſed E A æqualis eſt L P ex conſtrutione, ergo & A S æqualis erit L Q, hoc eſt ipſi P R, oſtenſæ ſunt enim æquales L Q P R. Quare tota E S toti L R æqualis erit. 36. Tertij Lem. 5. & Le. 6.

Poſtremo quoniam eſt vt A G ad A C ita L Z ad Z N ex conſtructione, & ita * quoque E B ad B S, erit E B ad B S vt L Z ad Z N, & exiſtente puncto B inter puncta S E erit conuertendo & componendo, exiſtente vero E inter S B, erit conuertendo & diuidendo, at exiſtente S inter E B, erit per conuerſionem rationis, & conuertendo, vt S E ad E B, ita N L ad L Z, hoc eſt ita L R ad Z ℞, eſt enim eadem ratio dupli ad duplum quæ ſempli ad ſimplum, ſed S E prima oſtēſa eſt æqualis L R tertiæ, ergo & E B ſecũda quartæ Z ℞ æqualis erit. Poſita eſt igitur inter circumferentias A B C K F recta linea E B æqualis Z ℞ datæ, eaque ad punctum A pertingit, quod erat faciendum. Lem. 5. & Le. 6.

# Lemma XXI.

AT vero rectam A I minorem eſſe quàm L N, ſic demonſtrabimus.

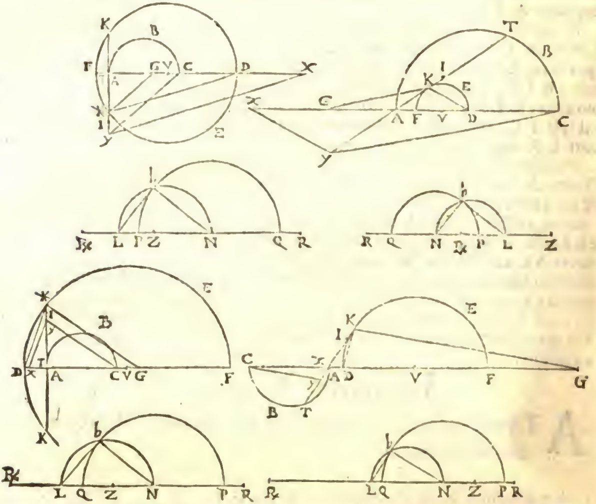
Iungantur G K K D, quibus parallelæ ducantur C Y Y X ſecantes A K F A continuatas in punctis Y X, & duplicetur L N in R, & ſit primũ F C minima omnium, quæ per A ductæ inter circumferentias ſemicirculorum interijciuntur. Quoniam igitur rectangulum F A X æquale* eſt quadrato A I, erunt proportionales F A A I A X. Vnde compoſita ex extremis non erit minor mediæ duplo, hoc eſt F X non erit minor quàm A I dupla. Lem. 5. & Le. 6.

Et quoniam eſt vt A G ad A C ità L Z ad Z N ex conſtructione, & ita quoque F C ad C X, erit F C ad C X vt L Z ad Z N, & exiſtente puncto C inter F X, erit conuertendo & componendo & rurſus conuertendo, exiſtente vero F inter X C, erit conuertendo diuidendoque, & iterum conuertendo, at exiſtente X inter F C, erit per conuerſionem rationis, vt F C ad F X ità L Z ad L N, & ita quoque Z ℞ ad L R, dupla videlicet ad duplam ſed F C minor eſt quàm Z ℞, ponitur enim F C minima, Z ℞ vero maior minima, ergo & F X quam L R minor erit, ſed F X non eſt minor quàm A I

dupla,

Digitized by Google

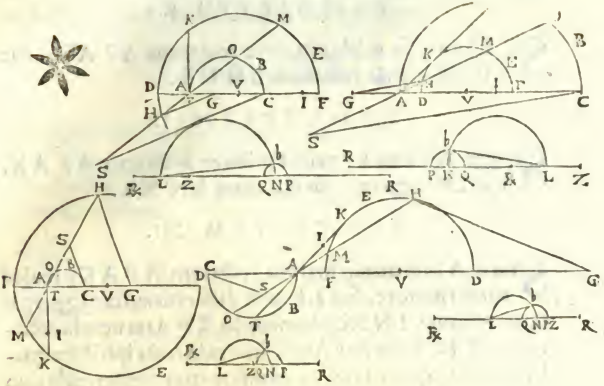
dupla, vt demonſtrauimus, ergo & A I dupla minor erit quam L R, & per conſequens A I ſimpla minor quàm L N, quæ eſt dimidia ipſius L R.



Deinde ſit K T omnium minima. Eadem ratione, quoniam re-
Le. 5. et 6 ctangulum Y A K æquatur* quadrato A I, erunt proportionales*
17. Sexti. Y A A I A K, quare Y K compoſita ex extremis non erit minor quàm A I dupla.

Le. 5. et 6 Et quoniam eſt vt A G ad A C ita * K T ad T Y, & ita quoque L Z ad Z N ex conſtructione, erit K T ad T Y vt L Z ad Z N, & exiſtente Z inter L N, erit conuertendo & componendo ac etiam conuertendo, exiſtente vero L inter Z N, erit conuertendo & diuidendo & rurſus conuertendo, at exiſtente N inter L Z, erit per conuerſionem rationis vt K T ad Y K ita L Z ad L N, hoc eſt ita Z ℞ ad L R, dupla videlicet ad duplam. Sed K T, cum ſit minima, minor eſt quàm Z ℞, ponitur enim Z ℞ maior minima, Ergo & Y K minor erit quàm L R. ſed Y K oſtenſa eſt non minor quàm A I dupla, ergo & A I dupla minor erit quam L R, & per conſequens A I ſimpla minor quàm L N, dimidia videlicet ipſius L R.

Denique



Denique neutra rectarum K T F C ſit minima, ſed alia quædam, vt pote M O, quæ producta ſecet ſemicirculum D E F, aut circulum completum in H, & iungatur G H, cui parallela ducatur C S occurrens M A continuatæ in S. Rectangulum igitur M A S æquale* erit quadrato A I, & ideò proportionales erunt M A A I A S, quare M S compoſita ex extremis non erit minor quàm A I dupla. *Le.5.et 6*

Et quoniam eſt vt A G ad A C ita*M O ad O S, & ita quoque L Z ad Z N ex conſtructione, erit M O ad O S vt L Z ad Z N, & exiſtente O inter M S, erit conuertendo componendoque, & rurſus conuertendo, exiſtente vero M inter O S, erit conuertendo, & diuidendo, ac rurſus conuertendo, at exiſtente S inter M O, erit per conuerſionem rationis, vt M O ad M S ita L Z ad L N, ideſt ita Z ℞ ad L R, dupla videlicet ad duplam. Sed M O, cum ſit minima, minor eſt quam Z ℞, ergo & M S minor erit quam L R. ſed oſtenſa eſt MS non minor quam A I dupla, ergo & ipſa A I dupla minor erit quàm L R, & conſequenter A I ſimpla minor quam L N, hoc eſt quam dimidia ipſius L R. Quocunque igitur caſu recta A I minor eſt quàm L N, quod erat demonſtrandum. *Le.5.et 6*

*Quo autem caſu L P fiat differentia rectarum L N N b, quoue aggregatum, ratio his conſtat præceptis.*

PRAE-

## PRAECEPTVM I.

SI AI non ſit minor maiore rectarum AF AK, fiat LP differentia rectarum LN Nb.

## PRAECEPTVM II.

SI vero AI non ſit maior minore rectarum AF AK, fiat LP aggregatum rectarum LN Nb.

## PRAECEPTVM III.

SEd ſi AI minor ſit maiore rectarum AF AK, maior autem minore, fiat LP ſiue differentia, ſiue aggregatum rectarum LN Nb, dummodo Z℞ data neutra rectarum KT FC ſit maior. Atque hoc caſu recta ipſi Z℞ æqualis poterit aptari inter circumferentias ſemicirculorum ex vtraque parte minimæ, & ideo duobus modis Problema abſolui. Nam ſi LP fiat differentia, aptabitur ea recta inter circumferentias ſemicirculorum quæ minima, & ea quæ minor eſt rectarum AF AK etiam producta terminantur. Si vero LP fiat aggregatum, aptabitur ea recta inter circumferentias ſemicirculorum, quæ minima & ea quæ maior eſt rectarum AF AK etiam producta terminantur.

## PRAECEPTVM IIII.

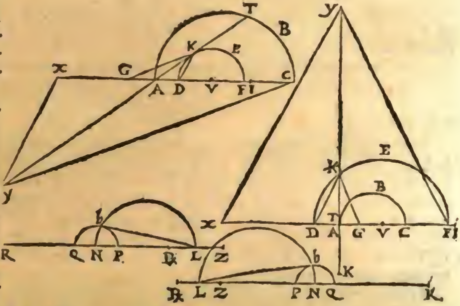
SI autem Z℞ data maior ſit minore rectarum KT FC, recta, ipſi Z℞ æqualis, poterit aptari inter circumferentias ſemicirculorum ex vna tantam parte minimæ, id eſt inter circumferentias quæ minima, & maxima intercipiuntur. Ergo ſi alterutra rectarum AF AK, ea ſcilicet quæ contermina eſt maximæ, hoc eſt maiori rectarum

KT FC

KTFC, minor fuerit quam reliqua, fiat LP differentia rectarum LN Nb, Sin maior, fiat aggregatum.

# Lemma XXII.

SIt igitur AI non minor maiore rectarum AF AK. Rectam, ipſi LP differentiæ rectarum LN Nb æqualem, poſſe à puncto A ad circumferentiam KF duci, ſic demonſtrabimus.



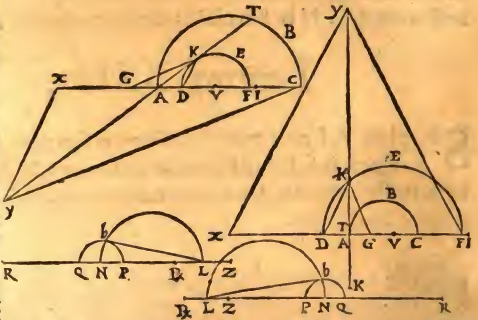

Conectātur GK KD, quibus parallelæ agantur CY YX ſecātes AK CA continuatas in pūctis YX, & duplicetur LN in R. Ergo æquales erunt LQ RP, æqualibus enim LN NR additæ ſunt æquales NQ NP, quare rectangulum PLQ æquale erit rectangulo LPR, ſed rectangulum PLQ æquale eſt quadrato Lb, circulum enim PbQ tangit Lb in b, quoniam rectus eſt angulus LbN in ſemicirculo; Ergo & rectangulum LPR æquale erit quadrato Lb.

Primum igitur ſit AF maior quàm AK, Ergo cum AI non ſit minor quàm AF, ea enim ponitur non minor maiore rectarum AF AK, erit KT * maior quàm FC, & ideo maxima * omnium quæ per A ducuntur & inter circumferentias KF ABC interijciuntur, ipſa vero FC * minima, vnde Z℞ data minor erit quàm KT, & maior quàm FC, ea enim ponitur minor maxima, maior autem minima. *Lem. 13. & 17.* *Lem. 15. & 19.*

Quoniam igitur eſt vt AG ad AC ita LZ ad ZN ex conſtructione, & ita * FC ad CX, erit LZ ad ZN vt FC ad CX, & con- *Le. 5. et 6*

H uertendo

uertendo vt Z N ad L Z ita C X ad F C, & exiſtente puncto L inter puncta Z N, erit diuidēdo, exiſtente vero Z inter L N, erit cōponendo vt L N ad L Z ita F X ad F C




& rurſus conuertendo vt L Z ad L N, hoc eſt, vt Z ℞ ad L R. (Eſt enim eadem ratio dupli ad duplum, quæ ſimpli ad ſimplum) ita erit F C ad F X, ſed Z ℞ oſtenſa eſt maior quam F C, ergo & L R quam F X maior erit.

Et quoniam rectangulum L P R oſtenſum eſt æquale quadrato L b hoc eſt quadrato A I, cui quoque æquale * eſt & rectangulum F A X, æqualia erunt rectangula L P R F A X, & ideò* proportionales L P F A A X P R, ſed L R compoſita ex extremis oſtenſa eſt maior quàm F X compoſita ex medijs, ergo* altera extremarum L P P R minima erit, ſed L P minor eſt quàm P R, ſunt enim æquales L N N R ex conſtructione, Ergo ipſa L P minima erit, & per conſequens minor quàm A F.

*Le.5.et 6*

*16.Sexti.*

*Lem.9.*

Vt autem reliqua demonſtrationis pars vtrique figuræ conueniat, transferatur (in ſemicirculis in quibus punctum A exiſtit in baſe D F) recta A K ad contrarias partes, ità vt Y K ſit compoſita ex A Y & A K. Quoniam igitur eſt vt A G ad A C ita L Z ad Z N ex conſtructione, & ita * K T ad T Y erit K T ad T Y vt L Z ad Z N, & conuertendo vt T Y ad K T ita Z N ad L Z, & exiſtente puncto L inter Z N, erit diuidendo, exiſtente vero Z inter L N, erit componendo vt Y K ad K T ita L N ad L Z, ideſt ità L R ad Z ℞, dupla videlicet ad duplam, & rurſus conuertendo vt K T ad Y K ita erit Z ℞ ad L R, ſed K T oſtenſa eſt maior quàm Z ℞, Ergo & Y K quàm L R maior erit.

*Le.5.et 6*

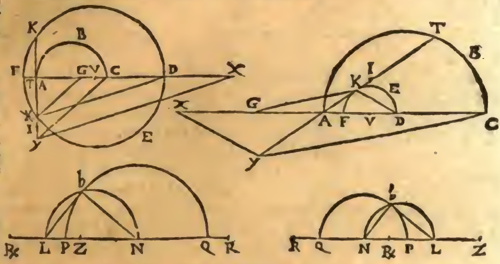
*Le.5.et 6* Et quoniam rectangulum Y A K æquale* eſt quadrato A I, proportionales erunt A K A I A Y, ſed A K minor eſt quàm A I, ponitur enim A I non minor maiore rectarum A F A K, hoc eſt non minor quàm A F, Ergo & A I minor erit quàm A Y, & per conſequens

ſequens

ſequens A K multo minor.

Et quoniam rectangulum L P R oſtenſum eſt æquale quadrato L b, hoc eſt quadrato A I, cui quoque æquale*eſt & rectangulum Y A K erunt rectangula Y A K L P R æqualia, & ideò*proportionales Y A L P P R A K. Sed Y K compoſita ex extremis oſtenſa eſt maior quàm L R compoſita ex medijs, ergo altera extremarum Y A A K erit* maxima, altera minima, ſed A K non eſt maxima, quia oſtenſa eſt minor quàm A Y, ergo minima erit, & ideò L P quàm A K maior. Cum itaque L P maior ſit quàm A K, & minor quàm A F, poterit à puncto A ad circumferentiam K F duci recta ipſi L P differentiæ rectarum L N N b æqualis. Le.5.et 6 16.Sexti. Lem.9.

Sed ſit AK maior quàm A F, ergo AI non erit minor q̃ A K, ponitur em̃ AI nō minor




maiore ipſarum A F A K, quare F C maior*erit quam K T, ac proinde maxima*omnium, quæ ad punctum A pertingentes inter circumferentias K F A B C interijciuntur, minima vero K T, vnde Z ℞ data minor erit quam F C, maior autem quàm K T. Lem. 14. & 18. Lem. 15. & 19.

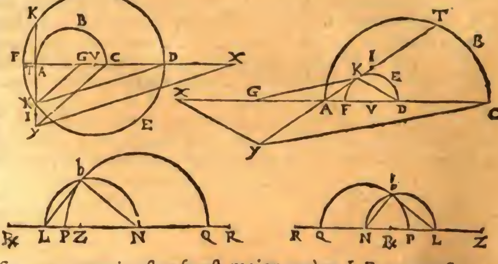
Quoniam igitur eſt, vt A G ad A C ità L Z ad Z N ex conſtructione, & ita*quoque F C ad C X, erit F C ad C X vt L Z ad Z N & conuertendo vt C X ad F C ita Z N ad L Z, & exiſtente F inter C X erit diuidendo, exiſtente vero C inter F X, erit componendo vt F X ad F C ità L N ad L Z, & ita L R ad Z ℞, dupla videlicet ad duplam, & rurſus conuertendo vt F C ad F X ita erit Z ℞ ad L R, ſed F C maior eſt quàm Z ℞, vt demonſtrauimus, ergo & F X quàm L R maior erit. Le.5.et 6

Et quoniam rectangulum F A X æquale*eſt quadrato A I, proportionales erunt F A A I A X, ſed F A minor eſt quàm A I, ponitur enim AI non minor maiore rectarum A F A K, hoc eſt nō minor quàm A K, ergo & A I minor erit quàm A X, atque adeò F A multo minor. Le.5.et 6

Et quoniam rectangulum L P R oſtenſum eſt æquale quadrato L b, hoc eſt quadrato A I, cui quoque æquatur* & rectangulum Le.5.et 6

F A X, erũt æqualia rectangula F A X L P R, & ideo proportionales* F A L P P R A X, ſed F X

16.Sexti.




compoſita ex extremis oſtenſa eſt maior quàm L R compoſita ex medijs, ergo altera extremarum F A A X erit maxima, altera minima, ſed F A non eſt maxima, quia oſtenſa eſt minor quàm A X, ergo minima erit, & ideò L P maior quàm A F.

Le.5.et 6 Aequæ quoniam eſt vt A G ad A C ità L Z ad Z N ex conſtructione, & ita* K T ad T Y, erit L Z ad Z N vt K T ad T Y, & conuertendo vt Z N ad L Z ita T Y ad K T, & exiſtente L inter Z N, erit diuidendo, exiſtente vero Z inter L N, erit componendo, vt L N ad L Z, hoc eſt vt L R ad Z ℞, dupla videlicet ad duplam, ita Y K ad K T, & rurſus conuertendo vt Z ℞ ad L R ita erit K T ad Y K, ſed Z ℞ oſtenſa eſt maior quàm K T, ergo & L R maior erit quàm Y K.

Et quoniam rectangulum L P R oſtenſum eſt æquale quadrato

Le 5.et 6 L b, hoc eſt A I, cui æquale* eſt & rectangulum Y A K, erunt

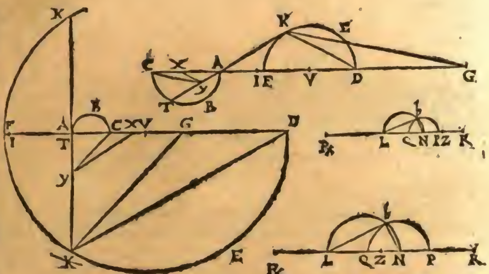
16.Sexti. æqualia rectangula L P R Y A K, & ideo proportionales* L P Y A A K P R, ſed L R compoſita ex extremis oſtenſa eſt maior quàm Y K compoſita ex medijs, ergo altera extremarum L P P R mini-

Lem 9. ma* erit, altera maxima, ſed L P non eſt maxima, eſt enim minor quàm P R hoc eſt quàm L Q, ergo minima erit, & ideò minor quàm A K. Cum igitur L P minor ſit quàm A K, & maior quàm A F, vt demonſtrauimus, poterit à puncto A ad circumferentiam K F duci recta ipſi L P differentiæ rectarum L N N b æqualis, quod erat oſtendendum.

Lem-

# Lemma XXIIII.

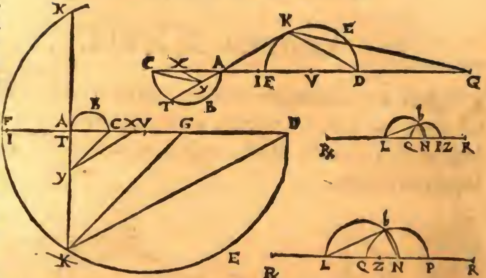
SEd ſit AI non maior minore rectarum A F A K. Rectam ipſi LP, aggregato rectarum LN Nb æqualem poſſe à puncto A ad circumferentiam KF duci, ita ſit manifeſtum.




Iūgantur KG KD, eiſque parallelæ ducantur CY YX ſecantes KΓCD in punctis YX, & duplicetur LN in R. Ergo æquales erunt LQ RP, ab æqualibus enim LN NR ablatæ ſunt æquales NQ NP, quare rectangulum PLQ æquale erit rectangulo LPR, ſed rectangulum PLQ æquale eſt quadrato Lb, recta enim Lb tangit circulum PbQ in b, quia rectus eſt angulus LbN in ſemicirculo, ergo & rectangulum LPR æquale erit quadrato Lb.

Sit primum AF minor quàm AK, ergo cum ſit AI non maior quàm AF, (ea enim ponitur nō maior minore rectarum AF AK) erit KT * maior quàm FC, vnde ipſa KT * maxima erit omnium ductarum per A, quæ inter circumferentias KFABC interijciuntur, minima vero FC. Itaque Z℞ data minor erit quàm KT, & maior quàm FC. *Lem. 13. & 17. Lem. 15. & 19.*

Quoniam igitur eſt vt AG ad AC ita LZ ad ZN ex conſtructione, & ita FC * ad CX, erit LZ ad ZN vt FC ad CX, & exiſtente puncto N inter LZ, erit per conuerſionem rationis, exiſtente vero Z inter LN, erit conuertendo componendoque & rurſus conuertendo, vt LZ ad LN ita FC ad FX, hoc eſt vt Z℞ ad LR ita FC ad FX, eſt enim eadem ratio dupli ad duplum quæ ſimpli ad ſimplum, ſed Z℞ oſtenſa eſt *Le. 5. li. 6*




eſt maior quã FC, ergo & LR quã FX maior erit. Et qm̃ rectangulum LPR oſtẽſum eſt æquale quadrato L b, hoc eſt quadrato A I, cui quoque æquale eſt & rectãgulum FAX, æqualia erunt rectangula LPR FAX, & ob id proportionales L P F A A X P R, ſed LR compoſita ex extremis oſtenſa eſt maior quàm FX compoſita ex medijs, ergo altera extremarum LP PR maxima*erit, altera minima, ſed LP non eſt minima, eſt enim maior quàm P R quia æquales ſunt LN NR, ergo ipſa L P maxima erit, & ideo maior quàm A F.

Lem.3.

Iam transferatur, in ſemicirculis in quibus punctum A exiſtit in baſe D F, recta A K ad contrarias partes quemadmodum in præcedenti Lemmate factum eſt, vt vna eademque demonſtratio vtrique figuræ conueniat. Quoniam igitur vt AG ad AC ita eſt LZ ad ZN ex conſtructione, & ita*KT ad TY, erit KT ad TY vt LZ ad ZN, & exiſtente N inter LZ, erit per conuerſionem rationis, exiſtente vero Z inter LN, erit conuertendo & componendo ac rurſus conuertendo vt KT ad KY ita LZ ad LN, hoc eſt ita Z ℞ ad L R, dupla videlicet ad duplam, ſed KT oſtenſa eſt maior quàm Z ℞, ergo & KY maior erit quàm LR.

Le.5.et 6

Et quoniam rectangulum Y A K æquale*eſt quadrato A I, proportionales erunt A K A I A Y, ſed A K maior eſt quam A I, ponitur enim A I non maior minore rectarum A F A K, hoc eſt non maior quam A F, ergo & A I maior erit quam A Y, & conſequenter A K multo maior.

Le.5.et 6

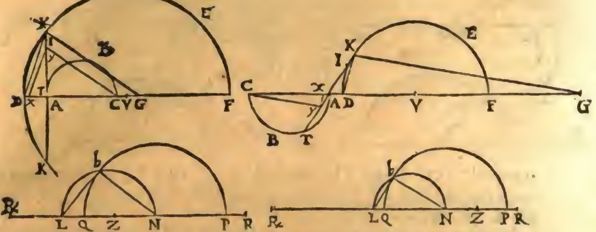
Et quoniam rectangulum L P R oſtenſum eſt æquale quadrato L b, hoc eſt quadrato A I, cui quoque æquatur* & rectangulum Y A K, æqualia erunt rectangula Y A K L P R, ac proinde proportionales Y A L P P R A K, ſed Y K compoſita ex extremis maior eſt quàm L R compoſita ex medijs vt demonſtrauimus, ergo altera extremarum Y A A K maxima*erit, altera minima, ſed A K non eſt minima, quia oſtenſa eſt maior quàm A Y, ergo maxima erit, vnde

Lem.5..6

Lem.3.

de

de L P minor quam A K. Poterit igitur à puncto A ad circumfe-
rentiam K F duci recta ipſi L P aggregato rectarum L N N b æqua-
lis, oſtenſa eſt enim L P maior quam A F, & minor quam A K.



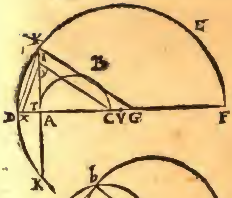

Deinde ſit AK minor quam A F. Ergo A I non erit maior quam
A K, ponitur enim A I non maior minore rectarum A F A K, qua-
re F C maior * erit quam K T, & ideo maxima * omnium quæ per *Lem. 14. & 18.*
A ducuntur, & inter circumferentias K F A B C interijciuntur, mi-
nima vero K T, vnde Z R data minor erit quam F C, maior autem *Lem. 15. & 19.*
quam K T. Quoniam igitur vt A G ad A C ita eſt L Z ad Z N ex
conſtructione, & ita F C * ad C X, erit F C ad C X ſicut L Z ad *Le. 5. et 6.*
Z N, & exiſtente N inter L Z, erit per conuerſionem rationis, exi-
ſtente vero Z inter L N, erit conuertendo & componendo ac rurſus
conuertendo vt F C ad F X ita L Z ad L N, hoc eſt ita Z R ad L R,
dupla videlicet ad duplam, ſed F C oſtenſa eſt maior quam Z R, er-
go & F X maior erit quam L R.

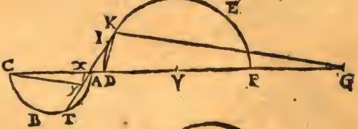
Et quoniam rectangulum F A X æquale * eſt quadrato A I, pro- *Le. 5. et 6.*
portionales erunt F A A I A X, ſed F A maior eſt quam A I, poni-
tur enim A I non maior minore rectarum A F A K, hoc eſt non ma-
ior quam A K; ergo & A I maior erit quam A X. vnde F A mul-
to maior.

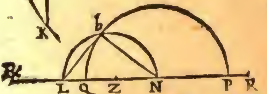
Et quoniam rectangulum L P R oſtenſum eſt æquale quadrato
Lb, hoc eſt quadrato A I, cui quoque æquale * eſt & rectangulum *Le. 5. et 6.*
F A X, erunt æqualia rectangula F A X L P R, & ideo proportiona-
les F A L P P R A X, ſed F X compoſita ex extremis oſtenſa eſt
maior quam L R compoſita ex medijs, ergo altera extremarum F A
A X maxima * erit, altera minima, ſed F A non eſt minima, quia *Lem. 9.*
oſtenſa eſt maior quam A X; ergo maxima erit. Vnde L P minor
quam A F.

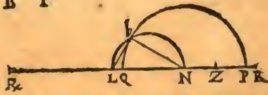
Eadem ratione, quoniam eſt vt A G ad A C ita L Z ad Z N ex
conſtructione, & ita * K T ad T Y, erit L Z ad Z N ſicut K T ad *Le. 5. et 6.*
T Y, & exiſtente N inter L Z, erit per conuerſionem rationis, exiſten-
te vero Z inter L N, erit conuertendo & componendo ac rurſus con-
uertendo,

Digitized by Google




uertendo, vt L Z ad L N, hoc eſt vt Z ℞ ad L R, dupla nempe ad duplam, ita K T ad Y K, ſed Z ℞ oſtenſa eſt maior quam K T, ergo & L R quam Y K maior erit.

Et quoniam vtrunque rectangulorum L P R Y A K æquale eſt quadrato L b, vel quadrato A I vt ſæpius demonſtrauimus, erunt ea rectangula inter ſe æqualia, & ideo proportionales L P Y A A K P R, ſed L R compoſita ex extremis maior eſt quam Y K compoſita ex medijs, ſic demonſtrauimus, ergo altera extremarum L P P R maxima * erit, altera minima, ſed L P non eſt minima, quia maior eſt quam P R, ſunt enim æquales L N N R, ergo maxima erit, atque adeo maior quam A K. Cum igitur L P maior ſit quam A K, & minor quam A F, vt demonſtrauimus, poterit à puncto A ad circumferentiam K F duci recta ipſi L P aggregato rectarum L N N b æqualis, quod erat oſtendendum.

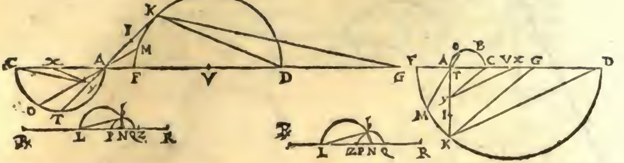
Lem. 9.

# Lemma XXIV.

DEnique ſit A I minor maiore rectarum A F A K, maior autem minore. Oſtendendum eſt igitur rectam ipſi L P, ſiue differentiæ, ſiue aggregato rectarum L N N b æqualem, poſſe à puncto A ad circumferentiam K F duci, dummodo Z ℞ data neutra rectarum K T F C ſit maior. Id autem ſic fiet.

A puncto A ad circumferentiam K F ducatur A M æqualis A I ſecans circumferentiam A B C etiam producta in O. Erit igitur M O * minima omnium, quæ per A ducuntur, & inter circumferentias

Lem. 16. & Lem. 20.




tias KF A B C interijciuntur. Iungantur autem GK KD, quibus parallelæ agantur C Y Y X ſecantes A K D A continuatas in punctis Y X, & duplicetur L N in R. Et primum fiat L P differentia rectarum L N N b, ea minor * erit quam L b, hoc eſt quam A M. Reliquum eſt igitur vt ipſa L P oſtendatur non minor minore rectarum A F A K. Id autem ſic demonſtrabimus. *8.Tertij.*

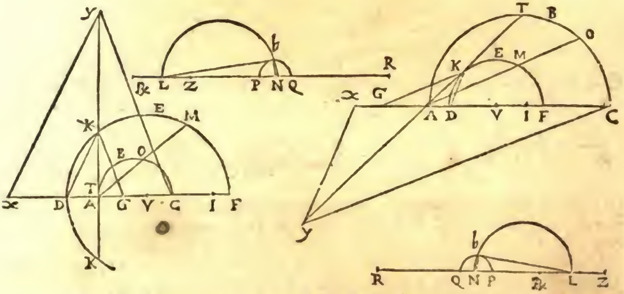
Sit primum A F minor quam A K. Quoniam igitur vt A G ad A C ita eſt LZ ad Z N ex conſtructione & ita * F C ad C X, erit F C ad C X vt LZ ad Z N, & exiſtente N inter L Z, erit per conuerſionem rationis, exiſtente vero Z inter L N, erit conuertendo & componendo ac rurſus conuertendo, vt F C ad F X ita L Z ad L N, & ita quoque Z ℞ ad L R, dupla videlicet ad duplam, ſed F C maior eſt quam Z ℞, vel ei æqualis, ponitur enim Z ℞ neutra rectarum K T F C maior, ergo & F X quam L R maior erit, vel ipſi L R æqualis. *Le 5. et 6*

Et quoniam rectangulum F A X æquale * eſt quadrato A I, proportionales erunt F A A I A X, ſed F A minor eſt quam A I, ponitur enim A I maior minore rectarum F A A K, hoc eſt maior quam A F, ergo & A I minor erit quam A X, vnde F A multo minor. *Le. 5. et 6*

Et quoniam LN N R, ſunt æquales ex conſtructione. (Nam L R facta eſt dupla ipſius L N) & æquales quoque ex conſtructione N Q N P, erunt per additionem æqualium æqualibus & LQ RP æquales, & ideo rectangulum PLQ. æquale rectangulo LPR, ſed & quadrato L b * æquale eſt, recta enim Lb tangit circulum P b Q in b, quoniam rectus eſt angulus L b N in ſemicirculo, ergo & rectangulum L P R æquale erit quadrato Lb, hoc eſt quadrato A I, ſed eidem quadrato A I * æquatur & rectangulum FAX, ergo æqualia erunt rectangula FAX LPR, ac proinde * proportionales FA LP PR A X, ſed FX compoſita ex extremis oſtenſa eſt vel maior quàm LR cõpoſita ex medijs, vel ei æqualis, ergo ſi ſit maior, erit altera extremarum FA AX* minima, ſed oſtenſa eſt F A minor quàm A X, Ergo ipſa AF minima erit, vnde LP quàm AF maior, hoc eſt maior minore rectarũ A F A K. Si vero FX ſit æqualis L R, minor extremarum, nempè AF, minori mediarum hoc eſt ipſi L P * æqualis erit. *36.Tertij* *Le. 5. et 6* *16.Sexti.* *Lem. 9.* *Lem. 11.*



Digitized by Google



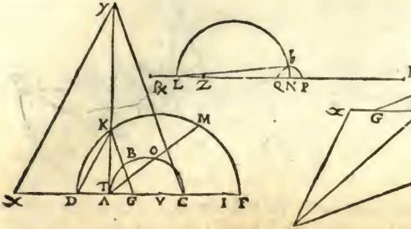

Sed ſit A F maior quàm A K, & in ſemicirculis in quibus punctũ A exiſtit in baſe ſemicirculi DF, tranſponatur A K in contrarias partes, vt factum eſt in præcedentibus. Quoniam igitur vt A G ad Le.5.et 6 A C ita eſt L Z ad Z N ex conſtructione, & ita * K T ad T Y, erit KT ad T Y, vt L Z ad Z N, & conuertendo vt T Y ad K T, ità Z N ad L Z, & exiſtente L inter N Z erit diuidendo exiſtente vero Z inter L N, erit componendo vt Y K ad K T ita L N ad L Z, & ità L R ad Z ℞, dupla videlicet ad duplam, & rurſus conuertendo vt K T ad Y K ita erit Z ℞ ad L R, ſed K T vel eſt maior quàm Z ℞, vel ei æqualis, ponitur enim Z ℞ neutra rectarum K T F C maior, ergo & Y K vel erit maior quàm LR, vel ipſi L R æqualis.

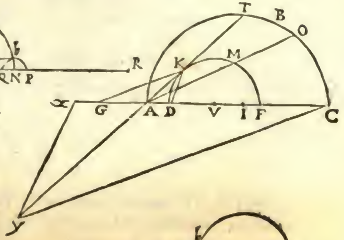
Le.5.et 6 Et quoniam rectangulum Y A K æquale * eſt quadrato A I, erit vt A K ad A I, ita A I ad A Y, ſed A K minor eſt quàm A I, ponitur enim A I maior minore rectarum A F A K, hoc eſt maior quàm A K, ergo & A I minor erit quàm A Y, & per conſequens A K multo minor.

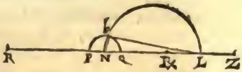
Et quoniam rectangulum L P R æquale eſt quadrato L b vt demonſtrauimus, hoc eſt quadrato A I, cui quidem quadrato æquale Le.5.et 6 * eſt & rectangulum Y A K, æqualia erunt rectangula Y A K LPR, & ideò proportionales YA LP PR AK, ſed Y K cōpoſita ex extremis Y A A K vel eſt maior quàm LR compoſita ex medijs, vel ei æqualis, ſic demonſtrauimus, ergo ſi ſit maior, erit altera extremarum Lem 9. Y A A K minima, * altera maxima, ſed A K non eſt maxima, eſt enim minor quàm A Y vt demonſtrauimus, ergo minima erit, & per conſequens L P maior quàm AK, id eſt maior minore rectarum A F A K. Si vero Y K compoſita ex extremis ſit æqualis L R compoſitæ ex medijs, minor extremarum, hoc eſt A K, minori mediarum quæ eſt L P æqualis erit. Cum igitur L P differentia rectarum L N N b oſtenſa ſit minor quàm A M, & maior vel æqualis minori re-

ctarum

ctarum A F A K, poterit à puncto A ad circumferentiam K F duci recta linea ipſi L P æqualis, poterit quidem duci ad eam circumferentiæ K F portionem, quæ minore rectarum AF AK, & ipſa A M intercipitur.







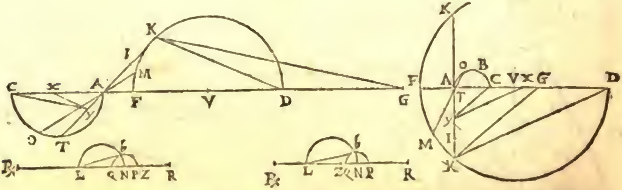
Deinde fiat LP aggregatum rectarum L N N b, erit igitur L P, maior quàm L b, hoc eſt quàm A M. Supereſt igitur vt ipſa L P oſtendatur minor maiore rectarum A F A K vel ipſi maiori æqualis. Id autem ſic fiet.

Sit primum A F maior quàm A K. Quoniam igitur vt A G ad A C ita eſt L Z ad Z N ex conſtructione, & ita* F C ad C X, erit *Le.5.et 6* F C ad C X, vt L Z ad Z N, & conuertendo vt C X ad F C ita Z N ad L Z, & exiſtente puncto L inter N Z, erit diuidendo, exiſtente vero Z inter L N, erit componendo, vt F X ad F C ità L N ad L Z, & rurſus conuertendo vt F C ad F X ita erit L Z ad L N, hoc eſt ita Z ℞ ad L R, dupla videlicet ad duplam, ſed F C maior eſt quàm Z ℞ vel ei æqualis, ponitur enim Z ℞ neutra rectarũ K T F C maior, ergo & F X quàm L R maior erit, vel ipſi L R æqualis.

Et quoniam rectangulum F A X æquale* eſt quadrato A I, erit *Le.5.et 6* vt F A ad A I ita A I ad A X, ſed F A maior eſt quàm A I, ponitur enim AI minor maiore rectarum A F A K, hoc eſt minor quàm A F, ergo & A I maior erit quàm A X, & ideò F A multo maior.

Et quoniam æquales ſunt L N N R, & æquales quoque N Q N P, erunt & reliquæ LQ RP æquales, & ob id rectangulũ L P R æquale rectangulo P L Q, hoc eſt* quadrato L b, vel quadrato A I, *36. Tertij* ſed & rectangulum F A X æquale eſt quadrato A I, ergo æqualia *Le.5.et 6* erunt rectangula F A X L P R, ac proinde proportionales F A L P P R A X, ſed F X compoſita ex extremis maior eſt, vel ſaltem æqualis L R compoſitæ ex medijs, vt demonſtrauimus, ergo ſi ſit maior, erit altera extremarum F A A X * maxima, altera minima, ſed F A *Lem 9.* non eſt minima, oſtenſa eſt enim maior quàm A X, ergo maxima

erit, & conſequenter L P minor quàm AF, hoc eſt minor maiore rectarum A F A K, ſi vero F X ſit æqualis L R, maior extremarum
Lem.11 nempè A F, maiori mediarum ideſt ipſi L P * æqualis erit.




Sed ſit A F minor quam A K, & transferatur in ſemicirculis in quibus punctum A exiſtit in baſe D F recta A K ad contrarias partes, vt prius. Quoniam igitur eſt vt A G ad A C ita L Z ad Z N
Lem.5.6. ex conſtructione, & ita * quoque K T ad T Y, erit K T ad T Y vt L Z ad Z N, & exiſtente N inter L Z, erit per conuerſionem rationis, exiſtente vero Z inter L N, erit conuertendo & componendo ac rurſus conuertendo, vt K T ad Y K ita L Z ad L N, vel ita Z ℞ ad L R, dupla videlicet ad duplam, ſed K T, vel eſt maior quam Z ℞, vel ei æqualis, ponitur enim Z ℞ non maior quam K T, ergo & Y K vel maior erit quam L R, vel ipſi L R æqualis.

Le.5.et 6 Et quoniam rectangulum Y A K æquale * eſt quadrato A I, proportionales erunt A K A I A Y, ſed A K maior eſt quam A I, ponitur enim A I minor maiore rectarum A F A K, hoc eſt minor quam A K, ergo & A I maior erit quam A Y, & conſequenter A K multo maior.

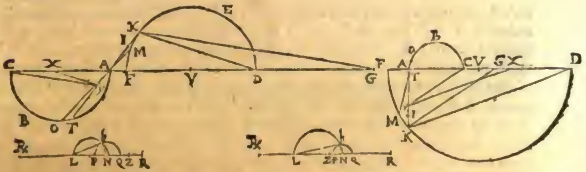
Et quoniam oſtenſum eſt rectangulum L P R æquale quadrato
Le.5.et 6 L b, hoc eſt quadrato A I, cui quoque æquatur * & rectangulum Y A K, æqualia erunt rectangula Y A K L P R, & ideo proportionales Y A L P P R A K, ſed Y K compoſita ex extremis Y A A K maior eſt quàm L R compoſita ex medijs L P P R, vel ei æqualis, vt
Lem.9. demonſtrauimus, ergo ſi ſit maior, altera extremarum Y A A K * maxima erit, altera minima, ſed A K non eſt minima, quia maior eſt quàm A Y, vt demonſtrauimus, ergo maxima erit, & conſequenter L P minor quàm AK, ideſt minor maiore rectarum AF A K. Si vero Y K compoſita ex extremis ſit æqualis L R compoſitæ ex medijs,
Lem.11. maior extremarum, nempè A K, maiori mediarũ, ideſt ipſi L P * æqualis erit. Cum itaque L P oſtenſa ſit maior quàm A M, minor autem vel æqualis maiori rectarum A F A K, poterit à puncto A ad circumferentiam K F duci recta ipſi L P aggregato rectarum L N Nb æqualis, poterit quidem duci ad eam circumferentiæ K F partem,

quæ

quæ maiore rectarum A F A K & ipſa A M intercipitur. Conſtat igitur rectam ipſi L P, ſiue differentiæ, ſiue aggregato rectarum L N N b æqualem, poſſe à puncto A ad circumferentiam K F duci, quod erat demonſtrandum.

# Lemma XXV.

Rurſus ſit A I minor maiore rectarum A F AK, maior autem minore. Sed Z ℞ data maior ſit minore rectarum KT FC. Manifeſtum eſt igitur, rectam ipſi Z℞ æqualem poſſe aptari inter circumferentias ſemicirculorum ex vna tantam parte minimæ, hoc eſt inter circumferentias quæ minima & maxima intercipiuntur. Itaque oſtendendum eſt, quod à puncto A ad eam circumferentiæ KF partem, quæ minima & maxima intercipitur, poterit duci recta æqualis L P, differentiæ quidem rectarum LN N b ſi altera ex rectis A F A K (ea ſcilicet quæ contermina eſt maximæ) minor fuerit quàm reliqua, aggregato vero ſi maior.

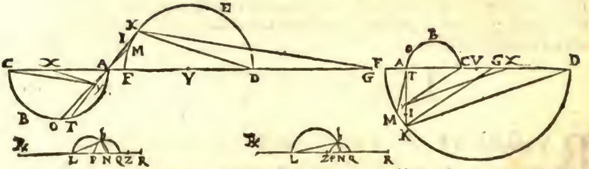



Sit primũ F C maior quàm KT, ergo recta ipſi Z℞ æqualis poterit aptari inter circũferentias MF O C tantum, inter circũferentias enim K M T O aptari nõ poteſt quia ponitur Z ℞ maior minore rectarum K T F C, hoc eſt maior ipſa K T quæ maxima * eſt omnium ductarum per A qua inter circumferentias K M T O interijciuntur. *Ex Cor. 1. Lem. 16. et ex co. 1 Lem. 20.*

Primum igitur ſit A F (ea ſcilicet quæ contermina eſt maximæ F C) minor quàm A K. Ergo ex iuſſu Lemmatis & præcepti quarti fiat LP differentia rectarum LN Nb, ea erit minor quàm L b, hoc eſt quàm A M, ſunt enim æquales L b A M ex constructione.

Iungan-

Digitized by Google



Iungantur autem GK KD, eiſque parallelæ ducantur CY YX ſecantes AK DA continuatas in punctis Y X, & duplicetur LN in R. Quoniam igitur eſt vt AG ad AC ita LZ ad ZN ex con-
Le.5.et6 ſtructione, & ita FC * ad CX, erit FC ad CX, ſicut LZ ad ZN, & exiſtente puncto N inter LZ, erit per conuerſionem rationis, exiſtente vero Z inter LN, erit conuertendo & componendo & rurſus conuertendo vt FC ad FX ita LZ ad LN, & ita Z℞ ad LR, dupla videlicet ad duplam, ſed FC cum ſit maior quam KT, & ideo omnium maxima, maior eſt quam Z℞, ponitur enim Z℞ minor maxima, ergo & FX quam LR maior erit.

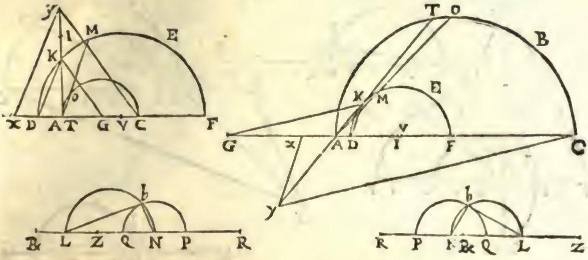
Le.5.et6 Et quoniam rectangulum FAX æquale * eſt quadrato AI, proportionales erunt FA AI AX, ſed FA minor eſt quam AI, ponitur enim AI maior minore rectarum AF AK, ergo & AI minor erit quam AX, vnde FA multo minor.

36.Tertij Et quoniam rectangulum PLQ hoc eſt LPR æquatur * quadra-
Le.5.et6 to Lb hoc eſt quadrato AI, cui quoque æquatur * & rectangulum FAX, æqualia erunt rectangula FAX LPR, & ideo proportionales FA LP PR AX, ſed FX compoſita ex extremis oſtenſa eſt maior quam LR compoſita ex medijs, ergo altera extremarum FA
Lem.3. AX minima * erit, altera maxima, ſed FA, cum ſit oſtenſa minor quam AX, non eſt maxima, ergo minima erit, & ideo LP maior quam FA. Cum igitur LP maior ſit quam AF, & minor quam AM vt demonſtrauimus, poterit à puncto A ad circumferentiam FM, hoc eſt ad eam circumferentiæ KF partem, quæ minima, & maxima intercipitur, duci recta ipſi LP differentiæ rectarum LN Nb æqualis.

Deinde ſit AF (contermina maximæ FC) maior quam AK. Ergo ex iuſſu Lemmatis fiat LP aggregatum rectarum LN Nb, erit
8.Tertij igitur LP maior * quam Lb, hoc eſt, quam AM.

Et quoniam vt AG ad AC ita eſt LZ ad ZN ex conſtructione,
Le.5.et6 & ita * quoque FC ad CX, erit FC ad CX vt LZ ad ZN, & conuertendo vt CX ad FC, ita ZN ad LZ & exiſtente L inter NZ, erit diuidendo exiſtente vero Z inter LN erit componendo

vt FX




vt F X ad F C ita L N ad L Z, & rurſus conuertendo vt F C ad F X ita L Z ad L N, & ita Z R ad L R, dupla videlicet ad duplam, ſed F C, cum ſit maior quam K T & ob id omnium maxima, maior eſt quam Z R, ponitur enim Z R minor maxima, ergo & F X maior erit quam L R.

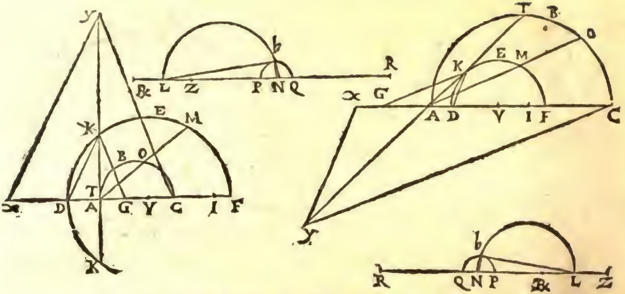
Et quoniam rectangulum F A X æquale eſt quadrato A I, erit vt F A ad A I ita A I ad A X, ſed F A maior eſt quam A I, ponitur enim A I minor maiore rectarum A F A K, ergo & A I maior erit quam A X, atque adeo A F multo maior.

Et quoniam rectangulum P L Q hoc eſt L P R æquale eſt quadrato L b, hoc eſt quadrato A I, cui quoque æquatur * & rectangulum F A X, æqualia erunt rectangula F A X L P R, quare proportionales * F A L P P R A X, ſed F X compoſita ex extremis oſtenſa eſt maior quam L R compoſita ex medijs, ergo altera * extremarum F A A X maxima erit, altera minima; ſed A F, cum ſit maior quàm A X vt demonſtrauimus, non eſt minima, ergo maxima erit, vnde L P minor erit quam F A. Cum igitur L P minor ſit quàm A F, & maior quàm A M vt demonſtrauimus, poterit à puncto A ad circumferentiam F M, hoc eſt ad partem circumferentiæ K F quæ minima & maxima intercipitur, duci recta ipſi L P aggregato rectarum L N N b æqualis.

*Le.5.et 6*

*16.Sexti.*

*Lem.9.*



Sed ſit K T maior quàm F C, ergo recta ipſi Z ℞ æqualis poterit aptari inter circumferentias KM TO tantùm, Sit primum AK(contermina maximæ K T) minor quam A F. Ergo ex iuſſu Lemmatis fiat L P differentia rectarum L N N b, ea minor erit quàm L b, hoc eſt quàm A M.

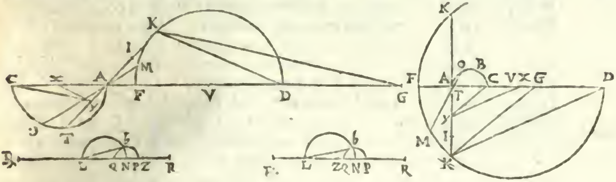
Iam transferatur A K ad contrarias partes in ſemicirculis in quibus punctum A in baſe D F exiſtit. Quoniam igitur eſt vt A G ad
*Le.5.et 6* A C ita L Z ad Z N ex conſtructione, & ita*quoque K T ad T Y, erit K T ad T Y vt L Z ad Z N, & conuertendo, vt T Y ad K T ita Z N ad L Z, & exiſtente L inter N Z, erit diuidendo, exiſtente vero Z inter L N, erit componendo vt Y K ad K T ità L N ad L Z, & rurſus conuertendo vt K T ad Y K ita erit L Z ad L N, & ita quoque Z ℞ ad L R, dupla videlicet ad duplam, ſed K T, cum ſit maior quàm F C & per conſequens omniũ maxima, maior eſt quàm Z ℞, ponitur enim Z ℞ minor maxima, ergo & Y K maior erit quàm L R.

*Le.5.et 6* Et quoniam rectangulum Y A K æquale * eſt quadrato A I, proportionales erunt A K A I Y A, ſed A K minor eſt quàm A I, ponitur enim A I maior minore rectarum A F A K, ergo & A I minor erit quàm A Y, vnde A K multo minor.

Et quoniam oſtenſum eſt rectangulum P L Q, hoc eſt rectangulum L P R, æquale quadrato L b, ſeu quadrato A I, cui quoque
*Le.5.et 6* æquale * eſt & rectangulũ Y A K, erunt æqualia rectangula Y A K L P R, & ideò proportionales Y A L P P R A K, ſed Y K compoſita ex extremis oſtenſa eſt maior quàm L R compoſita ex medijs, er-
*Lem.9.* go altera extremarum Y A A K erit minima, * altera maxima, ſed A K non eſt maxima, quia oſtenſa eſt minor quàm A Y, ergo erit minima, & ideò L P maior quàm A K. Cum itaque L P maior ſit quàm A K, & minor quàm A M vt eſt oſtenſum, poterit à puncto

A ad

A ad circumferentiam K M, hoc eſt ad circumferentiæ K F partem quæ minima & maxima intercipitur, duci recta ipſi LP differentiæ rectarum L N N b æqualis.




Deinde ſit A K (contermina maximæ K T,) maior quam A F. Ergo ſiat L P aggregatum rectarum L N N b. Conſtat igitur rectam L P maiorem eſſe quam L b hoc eſt quam A M.

Et quoniam eſt vt A G ad A C ita L Z ad Z N, & ita K T ad T Y, erit vt K T ad T Y ita L Z ad Z N, & exiſtente N inter L Z, erit per conuerſionem rationis, exiſtente vero Z inter L N, erit conuertendo & componendo & rurſus conuertendo vt K T ad Y K ita L Z ad L N, hoc eſt ita Z R ad L R, dupla videlicet ad duplam, ſed K T oſtenſa eſt maior quam Z R, ergo & Y K quam L R maior erit.

Et quoniam rectangulum Y A K æquale * eſt quadrato A I pro- *Le.5.et 6*
portionales erunt A K A I A Y, ſed A K maior eſt quam A I, ponitur enim A I minor maiore rectarum A F A K, ergo & A I maior erit quam A Y, & conſequenter A K multo maior.

Poſtremo quoniam rectangulum P L Q hoc eſt L P R æquale eſt quadrato L b, ſeu quadrato A I, cui quoque æquatur * & rectangu- *Le.5.et 6*
lum Y A K, æqualia erunt rectangula Y A K L P R, & ideo proportionales Y A L P P R A K, ſed Y K compoſita ex extremis oſtenſa eſt maior quam L R compoſita ex medijs, ergo altera extremarum Y A A K * erit maxima, altera minima, ſed A K, cum ſit *Lem.9.*
oſtenſa maior quam A Y, non eſt minima, ergo maxima erit, vnde L P minor quam A K. Cum itaque L P minor ſit quàm A K, & maior quàm A M vt demonſtrauimus, poterit à puncto A ad circumferentiam K M, hoc eſt ad circumferentiæ K F partem, quæ minima & maxima intercipitur, duci recta ipſi L P aggregato rectarum L N N b æqualis, quod erat oſtendendum.

*Sequitur ſecunda pars conſtructionis Problematis.*

Deinde, Vel ex eadem parte exiſtant dati duo ſemicirculi ABC DEF. Vel punctum A ſit in baſe ſemicirculi DF, & ſit in ſemicirculis quorum alter in altero includitur, FC non maior quam AD, in oppoſitis vero, qui ſe inuicem non ſecant etiam ſi compleantur, ſit non minor, in reliquis quomodocunque. Atque tangentium ſe inuicem ſemicirculorum ſit contactus in puncto C, & oporteat inter circumferentias ABC KF ponere rectam lineam æqualem Z℞ datæ, ita vt ad punctum A pertingat. Sumatur VG æqualis VC, & ſecetur Z℞ bifariam in L, & fiat * vt AG ad AC ita quadratum AK ad quadratum AI. Similiter fiat vt AG ad AC ita LZ ad

Lem 3. ZN, & in rectam LN ducatur perpendicularis LO, æqualis vero rectæ AI, & conectatur NO, & centro N interuallo NL differentia, vel aggregato ipſarum LZ ZN (differentia quidem ſi punctum A ſit in baſe ſemicirculi DF, aggregato vero ſi extra) circulus deſcribatur ſecans ON continuatam in punctis PQ, & à puncto A ad circumferentiam KF ducatur AE æqualis ipſi OP differentiæ, vel aggregato ipſarum ON NL. Quo autem caſu OP fiat differentia, quoue aggregatum, infra dicemus, deinde ſequentibus Lemmatibus demonſtrabimus eam rectam poſſe duci. Producta denique vbi opus exigit recta AE vſque ad circumferentiam ABC in B, recta EB problema efficiet.

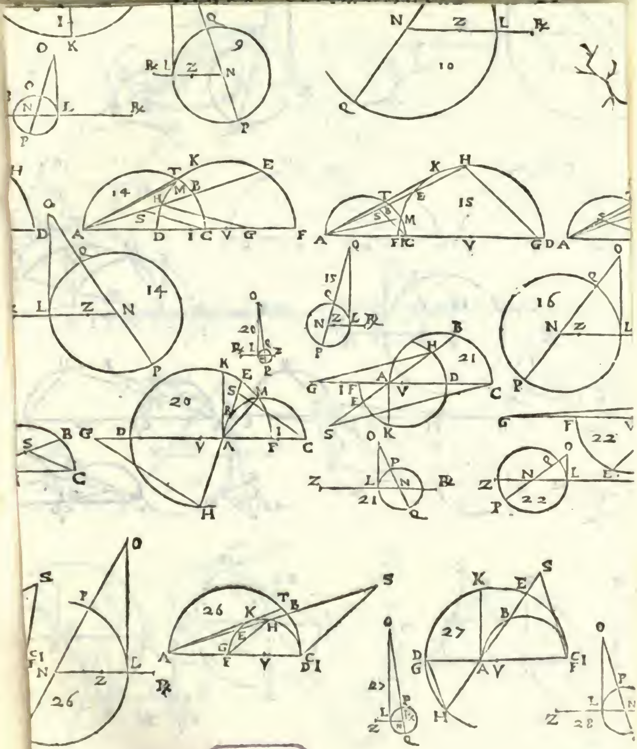
Secet enim BA etiam producta ſemicirculum DEF, aut circulum completum in H, & conectatur GH, cui parallela agatur CS ſecans EH, vel ei continuatæ occurrens in S. Quoniam igitur rectus eſt angulus OLN, recta LO tanget circulum PLQ in L, vnde rectangulum POQ æquale erit quadrato LO, hoc eſt quadrato AI, ſed & rectangulum EAS æquale * eſt quadrato AI, ergo

Le. 5. et 6 æqualia erunt rectangula POQ EAS, ſed æquales ſunt PO EA ex conſtructione, ergo & OQ AS æquales erunt; quare per additionem vel ſubductionem æqualium æqualibus erunt æquales & PQ ES.

Et quoniam eſt vt AG ad AC ita LZ ad ZN ex conſtructione, & ita * quoque EB ad BS, erit EB ad BS vt LZ ad ZN, & exiſtente

Le. 5. et 6 puncto B inter puncta SE, erit conuertendo & componendo, exiſtente vero E inter SB, erit conuertendo & diuidendo, exiſtente denique S inter EB, erit per conuerſionem rationis, & conuertendo vt SE ad EB ita LN ad LZ, hoc eſt ita PQ ad Z℞, eſt enim eadem ratio dupli ad duplum, quæ ſimpli ad ſimplum, ſed SE oſtenſa eſt æqualis ipſi PQ, ergo & EB ipſi Z℞ æqualis erit. Poſita eſt igitur inter circumferentias ſemicirculorum recta EB æqualis Z℞ datæ, eaque ad punctum A pertingit, quod facere oportebat.

*In ſemicirculis qui ſe inuicem tangunt, aut ſecant etiam completi*

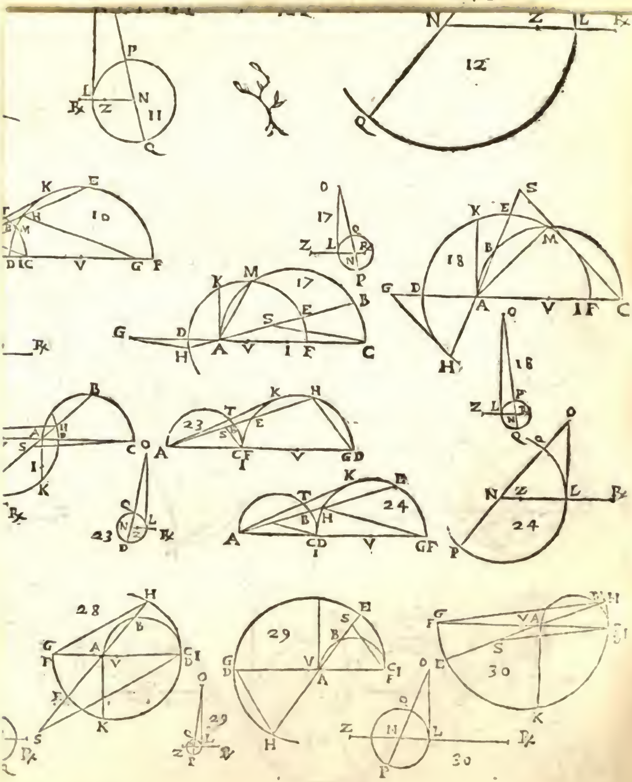



Bayeriſche
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

tia, aptabitur ea recta inter circũferentias ſemicirculorum.



Digitized by Google




pleti

*pleti facilius inuenitur quadratum A I, vt etiam poſt Lemma quintum & ſextum oſtendimus. Nam in ſecantibus, à puncto A ad punctum ſectionis, quod ſit M, ducta recta linea A M,* erit vt AG ad AC ita quadratum AK ad quadratum AM, ergo quadratum AM quadrato AI æquale erit.* Lem.4.

*In tangentibus vero quadratum AI æquale eſt quadrato AC. Nam cum rectangulum GAC * æquale ſit quadrato A K, proportionales ſunt tres rectæ lineæ A G A K A C. Vt igitur A G ad AC, prima videlicet ad tertiam, ita * erit quadratum ſecundæ AK ad quadratum A C tertiæ.* 36 Tertij et 35. Tertij. Cor 2 pr. 20. Sexti.

*Quo autem caſu O P fiat differentia rectarum O N N L, quove aggregatum, ratio his conſtat præceptis.*

PRAECEPTVM I.

SI A I non ſit minor maiore rectarum A F AK, fiat OP differentia rectarum O N N L.

PRAECEPTVM II.

SI vero A I non ſit maior minore rectarum A F AK, fiat O P aggregatum ipſarum O N N L.

PRAECEPTVM III.

SEd ſi A I maior ſit minore rectarum A F A K, minor autem maiore, quod quidem accidit in quibuſdam ſemicirculis ſe inuicem ſecantibus, fiat O P ſiue differentia, ſiue aggregatum rectarum O N N L, dummodo Z ℞ data non ſit maior minore rectarum K T F C. Atque hoc caſu recta ipſi Z ℞ æqualis, poterit aptari inter circumferentias ſemicirculorum ex vtraque parte ſectionis, & ideo duobus modis Problema abſolui. Nam ſi OP fiat differentia, aptabitur ea recta inter circũferentias ſemicirculorum

K 2 quæ

Digitized by Google

quæ puncto ſectionis & minore rectarum A F A K etiam producta intercipiuntur. Si vero O P fiat aggregatum, aptabitur ea recta inter circumferentias ſemicirculorum, quæ puncto ſectionis & maiore rectarum A F A K etiam producta terminantur.

### PRAECEPTVM IIII.

SI autem Z℞ data maior ſit minore rectarum K T F C. Recta ipſi Z℞ æqualis poterit aptari inter circumferentias ſemicirculorum ex vna tantum parte ſe&ionis, hoc eſt inter circumferentias, quæ maxima, & puncto ſectionis terminantur. Itaque ſi alterutra rectarum A F A K, ea ſcilicet quæ contermina eſt maximæ, hoc eſt maiori rectarum KT F C, minor fuerit quàm reliqua, fiat OP differentia rectarum O N N L, Sin maior, fiat aggregatum.

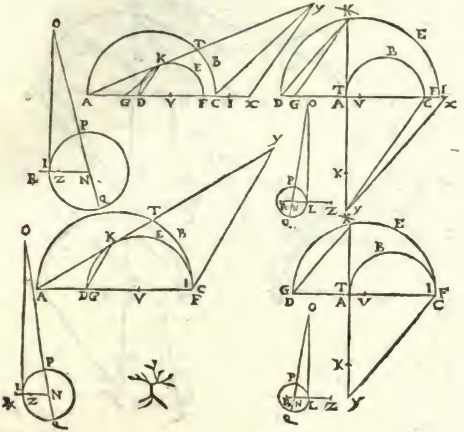
## Lemma XXVI.

SIt igitur AI non minor maiore rectarum A F AK. Rectam ipſi OP differentiæ rectarum ON N L æqualem poſſe à puncto A ad circumferentiam K F duci, demonſtrabimus hoc modo.

Iungantur G K K D, quibus parallelæ agantur C Y Y X ſecantes A K A C continuatas in punctis Y X. Et ſit primum A F maior quàm A K. Ergo ponitur A I non minor quam A F, vnde K T ma-
Le.13.17 ior * erit quàm F C & ideo * maxima omnium quæ inter circumfe-
Le.15.18 rentias K F ABC interijciuntur, minima * vero F C, vnde Z℞ data minor erit quàm K T, maior autem quam F C.
Le.3.et 6 Et quoniam rectangulum Y A K æquale * eſt quadrato A I, proportionales erunt AK AI Y A, ſed A K minor eſt quàm A I, ponitur enim A I non minor quàm A F quæ maior eſt quàm A K, ergo & A I minor erit quam Y A, & per conſequens A K multo minor. Transferatur autem exiſtente puncto A in baſe D F, recta AK in contrarias partes, vt vna eademque demonſtratio omnibus figuris

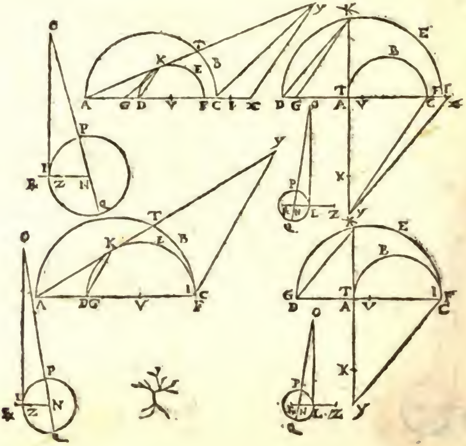
con-

*Ponantur hæ figuræ inter paginas 76 & 77. pertinent enim ad primam partem Lemmatis XXVI.*




Digitized by Google

*Ponantur hæ figuræ inter paginas 76. & 77. pertinent enim ad primam partem Lemmatis XXVI.*



conueniat. Quoniam igitur eſt vt A G ad A C ita L Z ad Z N ex
conſtructione, & ita * K T ad T Y, erit K T ad T Y vt L Z ad Z N, & *Le.5.et 6*
conuertendo vt T Y ad K T ita Z N ad L Z, & exiſtente puncto
Z inter puncta L N, erit componendo, exiſtente vero L inter Z N,
erit diuidendo vt Y K ad K T ità L N ad L Z, id eſt ita P Q ad Z ℞,
dupla nempè ad duplam, & rurſus conuertendo erit vt K T ad Y K
ita Z ℞ ad P Q, ſed K T oſtenſa eſt maior quam Z ℞, ergo & Y K
maior erit quàm P Q.

Et quoniam L O tangit circulum P O Q in L, rectus eſt enim an
gulus O L N ex conſtructione, rectangulum Q O P, æquale * erit *36.Tertij*
quadrato L O, hoc eſt quadrato A I, ſed eidē quadrato A I æqua-
tur * & rectangulum Y A K, ergo rectangula Y A K Q O P æqua- *Le.5.et 6*
lia erunt, & ideò proportionales Y A Q O O P A K, ſed Y K dif-
ferentia extremarum oſtenſa eſt maior quàm P Q differentia media-
rum, ergo altera extremarum Y A A K maxima erit, * altera mini- *Lem.10.*
ma, ſed A K non eſt maxima, eſt enim minor quàm A Y vt demon-
ſtrauimus, ergo minima erit, vnde O P maior erit quàm A K.

Et quoniam eſt vt A G ad A C ita L Z ad Z N ex conſtructio-
ne, & ita * F C ad C X, erit L Z ad Z N vt F C ad C X, & conuer- *Le.5.et 6*
tendo vt Z N ad L Z ita C X ad F C, & exiſtente puncto Z inter
puncta L N, erit componendo, exiſtente vero L inter Z N, erit di-
uidendo, vt L N ad L Z ita F X ad F C, & rurſus conuertendo erit
vt L Z ad L N, hoc eſt vt Z ℞ ad P Q, dupla videlicet ad duplam,
ità F C ad F X, ſed Z ℞ oſtenſa eſt maior quàm F C, ergo & P Q
quàm F X maior erit.

Et quoniam æqualia ſunt rectangula P O Q F A X, (æqualibus *36.Tertij*
enim quadratis L O A I ſunt * æqualia,) proportionales erunt P O *Le.5.et 6*
F A A X O Q, ſed P Q differentia extremarum oſtenſa eſt maior
quàm F X differentia mediarum, ergo altera extremarum P O O Q
hoc eſt ipſa P O minima * erit, & per conſequens minor quàm F A. *Lem.10.*
Cum igitur O P minor ſit quàm A F, & maior quàm A K vt de-
monſtrauimus, poterit à puncto A ad circumferentiam K F duci re-
cta ipſi O P differentiæ rectarum O N N L æqualis.

In ſemicirculis ſe inuicem tangentibus ſatis eſt oſtendere rectam
O P maiorem eſſe quàm A K, reliquum enim, hoc eſt ipſam O P
minorem eſſe quàm A F manifeſtum eſt. Nam cum ſint æquales
A C A I, vt infra ſecundam partem conſtructionis problematis de-
monſtrauimus, & O P minor * quàm L O, ea quoque minor erit *8 Tertij.*
quàm A C, hoc eſt quàm A F, ſunt enim in huiuſmodi ſemicircu-
lis A F A C vna eademque Linea.

Sed

Digitized by Google

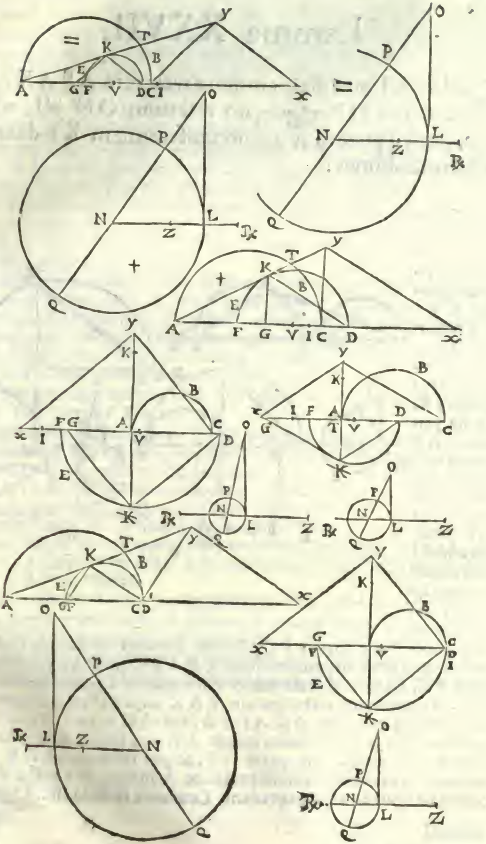
Sed ſit A K maior quàm A F. Ergo ponitur A I non minor quàm
*Le.14.18.* A K, vnde F C maior * erit quàm K T, ac proinde maxima * om-
*Le.15.19* nium quæ ad A pertingentes inter circumferentias K F A B C in-
*Le.15.19* terijciuntur, minima * vero K T. Itaque Z ℞ minor eſt quàm F C,
*Le.5.et 6* & maior quàm K T. Et quoniam rectangulum F A X æquale * eſt quadrato A I, proportionales erunt F A A I A X, ſed F A minor eſt quàm A I, ponitur enim A I non minor quàm A K, quæ maior eſt quàm A F, ex poſitione, ergo & A I minor erit quàm A X, vnde A F multo minor.

Et quoniam eſt vt A G ad A C ita L Z ad Z N ex conſtructione,
*Le.5.et 6* & ita quoque, F C * ad C X, erit F C ad C X vt L Z ad Z N, & conuertendo vt C X ad F C ita Z N ad L Z, & exiſtente puncto Z inter L N, erit componendo, exiſtente vero L inter Z N, erit diuidendo vt F X ad F C ita L N ad L Z, & per conſequens ità P Q ad Z ℞, dupla videlicet ad duplam, & rurſus conuertendo erit vt F C ad F X ita Z ℞ ad P Q, ſed F C maior eſt quàm Z ℞ vt demonſtrauimus, ergo & F X quàm P Q maior erit.

*Le.5.et 6* Et quoniam rectangulum F A X æquale * eſt quadrato A I, hoc
*36.Tertij* eſt quadrato L O, cui quoque æquale * eſt & rectangulum P O Q, æqualia erunt rectangula F A X P O Q, & ideò proportionales F A P O O Q A X, ſed F X differentia extremarum oſtenſa eſt maior
*Lem.10.* quàm P Q differentia mediarum, ergo altera extremarum * F A A X maxima erit, altera minima, ſed A F cum ſit minor quàm A X vt demonſtrauimus, non eſt maxima, ergo minimà erit, & conſequenter P O maior quàm F A.

Iam tranſponatur, exiſtente puncto A in baſe D F, recta A K in contrarias partes, vt reliquum demonſtrationis omnibus figuris conueniat. Quoniam igitur eſt vt A G ad A C ita L Z ad Z N, & ita K T ad T Y, erit L Z ad Z N vt K T ad T Y, & conuertendo vt Z N ad L Z ita T Y ad K T, & exiſtente puncto Z inter L N, erit componendo, exiſtente vero L inter Z N, erit diuidendo vt L N ad L Z, hoc eſt vt P Q ad Z ℞ (eſt enim vtrobique eadem ratio, cum ſint hæ illarum duplæ) ita Y K ad K T, & conuertendo vt Z ℞ ad P Q ita erit K T ad Y K, ſed Z ℞ oſtenſa eſt maior quam K T, ergo & P Q maior erit quam Y K.

*35.Tertij* Et quoniam rectangulum P O Q æquale * eſt quadrato L O, ſeu
*Le.5.et 6* quadrato A I, cui quoque æquale * eſt rectangulum Y A K, æqualia erunt rectangula P O Q Y A K, quare proportionales P O Y A A K O Q, ſed P Q differentia extremarum oſtenſa eſt maior quam Y K differerentia mediarum, ergo altera extremarum P O O Q, hoc eſt ipſa P O, erit minima, & ideo minor quam A K. Cum itaque P O minor ſit quam A K, & maior quam A F vt demonſtrauimus, poterit à puncto A ad circumferentiam K F duci recta ipſi P O differentiæ rectarum O N N L æqualis, quod erat oſtendendum.

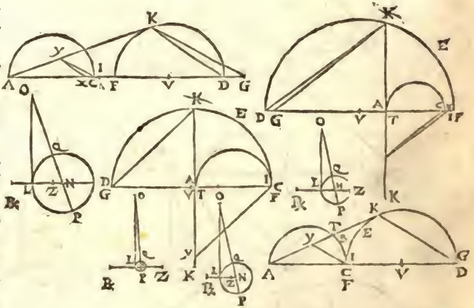



Lem-

# Lemma XXVII.

SEd ſit A I non maior minore rectarum A F A K. Rectam ipſi O P aggregato rectarum O N N L æqualem, poſſe à puncto A ad circumferentiam K F duci, ſic demonſtrabimus.

Conectãtur G K K D, eiſque parallelæ agantur C Y Y X ſecantes A K A C continuatas in pũctis Y X. Et ſit primum A F minor quã A K. Ergo A I nõ erit maior quã A F ponitur enĩ A I non maior minore ipſarum A F A K. Quare



Le.13.17 K T maior * erit qnam F C, & ideo maxima * omnium ductarum
Le.15.19 per A quæ inter circumferentias K F A B C interijciuntur, minima vero F C, vnde Z ℞ data minor erit quam K T, maior autem quam
Le.5.et 6 F C. Et quoniam rectangulum Y A K æquale * eſt quadrato A I, proportionales erunt A K A I Y A, ſed A K maior eſt quam A I, ponitur enim A I non maior quam A F, quæ minor eſt quam A K, ergo & A I maior erit quam A F, & per conſequens A K multo maior. Transferatur autem exiſtente A in baſe D F recta A K ad contrarias partes, vt in præcedenti Lemmate factum eſt. Quoniam

igitur

igitur vt A G ad A C ita eſt L Z ad Z N, & ita K T ad T Y, erit K T ad T Y vt L Z ad Z N, & exiſtente N inter Z L, erit per conuerſionem rationis, exiſtente vero Z inter L N, erit conuertendo & componendo ac rurſus conuertendo vt K T ad Y K ita L Z ad L N hoc eſt ita Z ℞ ad P Q, dupla videlicet ad duplam, ſed K T oſtenſa eſt maior quam Z ℞, ergo & Y K quam P Q maior erit.

Et quoniam rectus eſt angulus O L N ex conſtructione, recta L O tanget circulum P L Q in L, & propterea rectangulum Q O P æquale erit quadrato L O, ſed & rectangulum Y A K æquale* eſt quadrato A I, hoc eſt quadrato L O, ergo duo rectangula Y A K Q O P æqualia erunt, ac proinde proportionales Y A Q O O P A K, ſed Y K differentia extremarum maior eſt quam P Q differentia mediarum vt demonſtrauimus, ergo altera extremarum Y A A K, hoc eſt ipſa A K, quæ oſtenſa eſt maior quam A Y maxima* erit, vnde O P minor quam ipſa A K.

*Le. 5. et 6* · *Lem. 10.*

Similiter quoniam eſt vt A G ad A C ita L Z ad Z N ex conſtructione, & ita* F C ad C X, erit L Z ad Z N vt F C ad C X, & exiſtente puncto N inter Z L erit per conuerſionem rationis, exiſtente vero Z inter L N, erit conuertendo & componendo & rurſus conuertendo vt L Z ad L N ita F C ad F X, hoc eſt vt Z ℞ ad P Q ita F C ad F X (eſt enim eadem ratio L Z ad L N, quæ Z ℞ ad P Q, cum ſint hæ illarum duplæ) ſed Z ℞ oſtenſa eſt maior quam F C, ergo & P Q quam F X maior erit.

*Le 5. et 6*

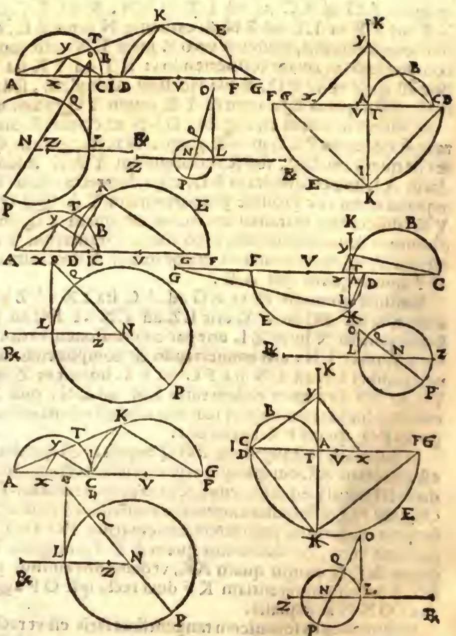
Et quoniam rectangulum P O Q æquale* eſt quadrato L O, hoc eſt quadrato A I, cui quoque æquale eſt* & rectangulum F A X, ipſa duo rectangula æqualia erunt, & ideo proportionales P O F A A X O Q, ſed P Q differentia extremarum oſtenſa eſt maior quam F X differentia mediarum, ergo altera extremarum P O O Q, nempe P O, maxima* erit, & ideo maior quam F A. Cum igitur P O maior ſit quam A F, & minor quam A K, vt demonſtrauimus, poterit à puncto A ad circumferentiam K F duci recta ipſi O P aggregato rectarum O N N L æqualis.

*36. Tertij* · *Le. 5. et 6* · *Lem. 10.*

In ſemicirculis ſe inuicem tangentibus ſatis eſt vt recta O P oſtendatur minor quam A K, vt factum eſt, nam ipſam O P maiorem eſſe quam A F patet, quoniam æquales ſunt A C L O, vt infra ſecundam partem conſtructionis problematis demonſtratum eſt, & O P maior eſt quam L O, ergo & maior quam A C hoc eſt quam A F.

L Deinde

Digitized by Google



Deinde ſit AK minor quàm AF. Ergo ponitur AI non maior quàm AK, vnde
Le.14.18 FC maior * erit quàm KT, ac proinde
Le.25.19 maxima * omniũ quæ inter circumferẽtias KF ABC interijciuntur, ipſa vero KT minima. Itaque Z ℞ data minor erit quã FC, & maior quã KT. Et quoniam rectãgulum FAX æqua-
Le.5.et 6 le * eſt quadrato AI, proportionales erunt FA AI AX; ſed FA maior eſt quã AI, ponitur enim AI non maior quàm AK, quæ minor eſt quàm AF ex poſitione, ergo & AI maior erit quàm AX, & conſequenter AF multo maior.

Et quoniam eſt vt AG ad AC ita LZ ad ZN ex conſtructione,
Le.5.et 6 & ita FC * ad CX, erit FC ad CX vt LZ ad ZN, & exiſtente puncto N inter ZL, erit per conuerſionem rationis, exiſtente vero Z inter LN, erit conuertendo, & componendo & rurſus conuertendo vt FC ad FX ita ZL ad LN, hoc eſt ita Z℞ ad PQ, dupla videlicet ad duplam, ſed FC oſtenſa eſt maior quàm Z℞, ergo & FX maior erit quàm PQ.

36.Tertij Et quoniam rectangulum POQ æquale * eſt quadrato LO, hoc

eſt

eſt quadrato A I, cui quoque æquatur * & rectangulum F A X, æqualia erunt rectangula F A X P O Q, & ideò proportionales F A P O O Q A X, ſed F X differentia extremarum oſtenſa eſt maior quàm P Q differentia mediarum, ergo altera extremarum, ipſa videlicet F A, quæ oſtenſa eſt maior quàm A X, maxima * erit vnde O P minor quàm A F. Le.5.ui 6 Lem.10.

Similiter exiſtente puncto A in baſe D F, tranſponatur A K in partes contrarias propter iam dictam cauſam. Quoniam igitur eſt vt A G ad A C ita L Z ad Z N, & ita K T ad T Y, erit L Z ad Z N ſicut K T ad T Y, & exiſtente puncto N inter Z L, erit per conuerſionem rationis, exiſtente vero Z inter L N, erit conuertendo, & componendo, & rurſus conuertendo vt Z L ad L N hoc eſt vt Z ℞ ad P Q, dupla videlicet ad duplam, ita K T ad Y K, ſed Z ℞ maior eſt quàm K T, vt demonſtrauimus, ergo & P Q quàm Y K maior erit.

Poſtremo quoniã æqualia ſunt rectangula P O Q Y A K, vtrunque enim æquale * eſt quadrato L O, vel quadrato A I, proportionales erunt P O Y A A K O Q, ſed P Q differentia extremarum oſtenſa eſt maior quàm Y K differentia mediarum, ergo altera extremarum ipſa videlicet P O maxima * erit, & conſequenter maior quàm A K. Cum itaque P O maior ſit quàm A K, minor autem quàm A F vt demonſtrauimus, poterit à puncto A ad circumferentiam K F duci recta ipſi P O aggregato rectarum O N N L æqualis, quod oſtendiſſe oportuit. 36.Tertij Le.5.ui 6 Lem.10.

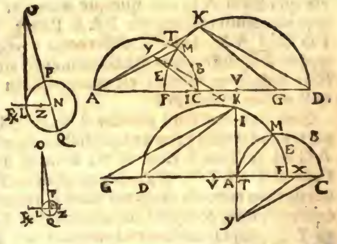
# Lemma XXVIII.

IAm ſit AI maior minore rectarum AF AK minor autem maiore, quod quidem accidit in nonnullis ſemicirculis ſe inuicem ſecantibus. Oſtendendum eſt igitur, rectam ipſi P O ſiue differentiæ ſiue aggregato rectarũ ON NL æqualem, poſſe à puucto A ad circumferentiam K F duci, dummodo Z ℞ data non ſit maior minore rectarum K T F C.

Iungantur GK KD, quibus parallelæ ducantur C Y Y X, ſecantes A K D A continuatas in punctis Y X, & à puncto A ad punctum ſectionis ſemicir-




 culo-




culorum, quod ſit M, ducatur A M. Ergo * vt A G ad A C ita erit quadratum A K ad quadratum A M, ſed vt A G ad A C ita eſt quadratum A K ad quadratum A I, ergo recta A M æqualis erit rectæ A I vel O L. Primum igitur fiat P O differentia rectarum O N N L, ea minor erit quàm L O hoc eſt quàm A M, reliquum igitur eſt vt ipſa P O oſtendatur non minor minore rectarum A F A K id autem ſic fiet.

Lem.4.

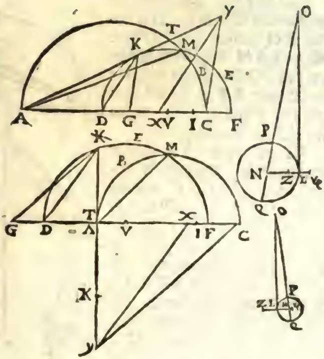
Sit primum A F minor quàm A K. Quoniam igitur vt A G ad
Le.3.11 6 A C ita eſt L Z ad Z N ex conſtructione, & ita * F C ad C X, erit F C ad C X vt L Z ad Z N, & exiſtente N inter Z L erit per conuerſionem rationis, exiſtente vero Z inter L N, erit conuertendo componendoque ac rurſus conuertendo vt F C ad F X ita Z L ad L N, hoc eſt ita Z ℞ ad P Q, dupla videlicet ad duplam, ſed F C maior eſt quàm Z ℞, vel ei æqualis, ponitur enim Z ℞ non maior minore rectarum K T F C, ergo & F X quàm P Q maior erit, vel ipſi P Q æqualis.

Le.3.11 6 Et quoniam rectangulum F A X æquale * eſt quadrato A I, proportionales erunt F A A I A X, ſed F A minor eſt quàm A I, ponitur enim A I maior minore rectarum A F A K, hoc eſt maior quàm A F, ergo & A I minor erit quàm A X, vnde F A multo minor.

Et quoniam L O tangit circulum P L Q in L, rectangulum P O Q
Le.3.11 6 æquale erit quadrato L O, ſeu quadrato A I, cui quoque æquale * eſt & rectangulum F A X, ergo rectangulum F A X æquale erit rectangulo P O Q. Vt igitur F A ad P O ita erit O Q ad A X, ſed F X differentia extremarum oſtenſa eſt maior quàm P Q differentia mediarum, vel ei æqualis, ergo ſi ſit maior, altera extremarum F A X, hoc eſt ipſa F A, quæ oſtenſa eſt minor quàm A X, minima erit;
Lem.16. Vnde P O maior erit quam F A, hoc eſt maior minore rectarum A F A K. Si vero F X ſit æqualis ipſi P Q, minor extremarum,
Lem.12. nempè A F, minori mediarum hoc eſt ipſi P O æqualis * erit.

Deinde ſit A F maior quàm A K. Tranſponatur autem in ſemicirculis in quibus punctum A exiſtit in baſe D F recta A K in cōtrarias partes, vt factum eſt in præcedentibus. Quoniam igitur vt
Le.3.11 6 A G ad A C ita eſt L Z ad Z N ex conſtructione; & ita * K T ad T Y, erit K T ad T Y vt L Z ad Z N, & conuertendo vt T Y ad K T ita Z N ad L Z, & exiſtente pūcto Z inter L N, erit componendo

nendo, exiſtente vero L inter N Z, erit diuidendo vt YK ad KT ita LN ad LZ, hoc eſt ita PQ ad Z℞, dupla nempè ad duplam, & rurſus conuertendo erit vt K T ad Y K ita Z ℞ ad P Q, ſed KT vel eſt maior quàm Z ℞, vel ei æqualis ponitur enim Z ℞ non maior minore rectarum K T F C, ergo & Y K vel erit maior quàm P Q, vel ipſi P Q æqualis.

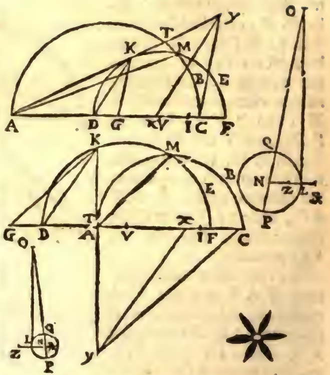


Et quoniam rectangulum Y A K æquale * eſt quadrato AI, proportionales erunt A K A I YA, ſed A K minor eſt quàm A I, ponitur enim AI maior minore rectarum A F AK, hoc eſt maior quàm AK, ergo & AI minor erit quàm A Y, & per conſequens AK multo minor. Le.5.116

Et quoniam rectangulum P O Q æquale eſt quadrato L O tangentis circulum P L Q in L, ſeu quod idem eſt quadrato A I, cui quoque æquale * eſt & rectangulum Y A K, ipſa rectãgula Y A K Le.5.116 P O Q æqualia erũt, ac proinde proportionales Y A P O O Q A K, ſed Y K differentia extremarum maior eſt vel æqualis ipſi P Q differentiæ mediarum vt demonſtrauimus, ergo ſi ſit maior, altera extremarum Y A A K hoc eſt ipſa A K quæ oſtenſa eſt minor quam A Y, minima * erit, vnde P O maior erit quam A K, hoc eſt maior Lem.10. minore rectarum A F A K. Si vero Y K differentia extremarum æqualis ſit P Q differentiæ mediarum, minor extremarum, hoc eſt A K, minori mediarum ipſi videlicet P O æqualis * erit. Cum itaque Lem.11. P O differentia rectarum O N N L oſtenſa ſit minor quam A M, & maior vel æqualis minori rectarum A F A K, poterit à puncto A ad circunferentiam K F duci recta linea ipſi P O æqualis, poterit enim duci ad eam circumferentiæ K F portionem quæ minore rectarum A F A K & ipſa A M intercipitur.

Sed

Digitized by Google




Sed fiat P O aggregatum rectarum O N N L. Erit igitur P O maior quã LO hoc eſt quã AM. Supereſt igitur vt ipſa PO ſit minor maiore rectarum A F A K, vel ipſi maiori æqualis. Id autem ſic demonſtrabimus.

Sit primum A F maior quam A K. Quoniam igitur vt A G ad A C ita eſt L Z ad Z N ex conſtructio-
Le.5.et 6 ne, & ita * FC ad C X, erit vt F C ad C X ita L Z ad Z N, & conuertẽdo vt C X ad F C ita Z N ad Z L, & exiſtente puncto Z inter L N erit componendo, exiſtente vero L inter NZ, erit diuidendo vt F X ad F C ita L N ad L Z, hoc eſt ita P Q ad Z ℞, dupla nempe ad duplam, & rurſus conuertendo erit vt F C ad F X ita Z ℞ ad P Q, ſed F C maior eſt quàm Z ℞ vel ei æqualis, ponitur enim Z ℞ non maior minore rectarum K T F C, ergo & F X maior erit quàm P Q vel ipſi P Q æqualis.

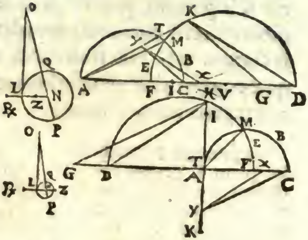
Le.5.et 6 Et quoniam rectangulum F A X æquale * eſt quadrato A I, erit vt F A ad A I ita A I ad A X, ſed F A maior eſt quam A I, ponitur enim A I minor maiore rectarum AF AK, hoc eſt minor quàm A F, ergo & A I maior erit quam A X, atque adeo A F multo maior.

Et quoniam æqualia ſunt rectangula F A X P O Q, vtrunque enim æquale eſt quadrato A I, vel L O, proportionales erunt F A P O O Q A X, ſed F X differentia extremarũ oſtenſa eſt maior vel æqualis P Q differentiæ mediarum, ergo ſi ſit maior, erit altera extremarum F A A X, ipſa videlicet F A maxima, * vnde P O minor erit
Lem.10. quam F A, hoc eſt minor maiore rectarum A F A K. Si vero F X ſit æqualis P Q, maior extremarum, nempe A F, maiori mediarum,
Lem.11. ideſt ipſi P O * æqualis erit.

Deinde ſit A K maior quàm A F. Exiſtente igitur puncto A in baſe D F, tranſponatur A K in contrarias partes vt factum eſt & prius. Quoniã igitur vt AG ad AC ita eſt LZ ad ZN ex conſtructione
Le.5.et 6 & ita * K T ad T Y, erit KT ad TY vt L Z ad Z N, & exiſtente puncto N inter Z L, erit per conuerſionem rationis, exiſtente vero Z inter L N, erit conuertendo & componendo, ac rurſus conuertendo

vt

vt K T ad Y K ita Z L ad L N, hoc eſt ita Z ℞ ad P Q dupla nempe ad duplam, ſed K T vel eſt maior quam Z ℞, vel ei çqualis, ponitur enim Z ℞ non maior minore rectarũ K T F C, ergo & Y K erit vel maior q̃ P Q vel eidem P Q æqualis.




Et quoniam rectangulum Y A K* æquale eſt quadrato A I, proportionales erunt A K A I A Y, ſed A K maior eſt quam A I, ponitur enim A I minor maiore rectarum A F A K, hoc eſt minor quam A K, ergo & A I maior erit quam A Y, & per conſequens A K multo maior. Lo.5.11 6

Poſtremo quoniam æqualia ſunt rectangula Y A K P O Q. vtrunque enim æquale eſt quadrato A I vel L O, erunt proportionales Y A P O O Q A K, ſed Y K differentia extremarum oſtenſa eſt maior aut æqualis P Q differentiæ mediarum, ergo ſi eſt maior, altera extremarum Y A A K, hoc eſt ipſa A K erit* maxima, & conſequenter P O minor quam A K, id eſt minor maiore rectarum A F A K. Si vero Y K differentia extremarum æqualis eſt P Q differentiæ mediarum, maior extremarum, hoc eſt A K maiori mediarum, ipſi videlicet P O,* æqualis erit. Cum igitur P O oſtenſa ſit maior quam A M, & minor vel æqualis maiori rectarum A F A K, poterit à puncto A ad circumferentiam K F duci recta ipſi P O aggregato rectarum O N N L æqualis, poterit enim duci ad eam circumferentiæ K F portionem quæ maiore rectarum A F A K & ipſa A M intercipitur. Conſtat igitur rectam ipſi P O, ſiue differentiæ, ſiue aggregato rectarum O N N L æqualem, poſſe à puncto A ad circumferentiam K F duci, quod erat demonſtrandum.

Lem.10. Lem.12.

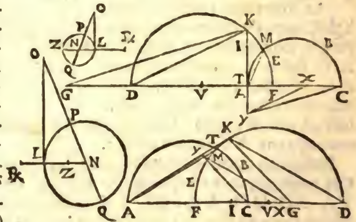
# Lemma XXIX.

RVrſus ſit A I maior minore rectarum A F A K, minor autem maiore, ſed Z ℞ data maior ſit minore rectarum K T F C. Manifeſtum eſt igitur rectam ipſi Z ℞ æqualem poſſe aptari tantum inter circumferentias quæ puncto ſectionis & maxima intercipiuntur. Itaque oſtendendum eſt, quod à puncto A ad eam circumferen-



Digitized by Google

tiæ K F partem, quæ maxima & puncto ſectionis intercipitur, poterit duci recta æqualis P O, differentiæ quidem rectarum ON NL ſi altera ex rectis AF AK, ea ſcilicet quæ contermina eſt maximæ, minor fuerit quàm reliqua, aggregato vero, ſi maior.




Sit primum F C maior quam K T. Ergo recta ipſi Z ℞ æqualis poterit aptari inter circumferentias M F M C tantum, hoc eſt inter circumferentias quæ maxima F C & puncto ſectionis intercipiuntur.

Primum igitur ſit AF (ea ſcilicet quæ contermina eſt maximæ F C) minor quam A K. Ergo ex iuſſu Lemmatis & præcepti quarti fiat PO differentia rectarum O N N L, ea minor erit quam L O, hoc eſt quam A M.

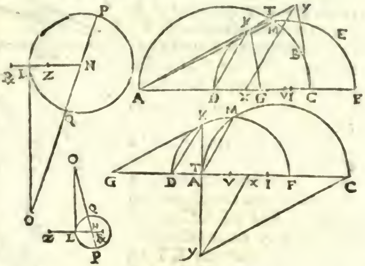
Conectantur autem G K K D, eiſque parallelæ agantur C Y Y X ſecantes K A D A continuatas in punctis Y X. Quoniam igitur vt
Le.5.et 6 AG ad A C ita eſt L Z ad Z N ex conſtructione, & ita * quoque F C ad C X, erit vt F C ad C X ita L Z ad Z N, & exiſtente N inter Z L, erit per conuerſionem rationis, exiſtente vero Z inter L N, erit conuertendo & componendo & rurſus conuertendo vt F C ad ad F X ita Z L ad L N, hoc eſt ita Z ℞ ad P Q, eſt enim eadem ratio dupli ad duplum quæ ſimpli ad ſimplum, ſed F C cum ſit maior quam K T, ac proinde omnium maxima, maior eſt quam Z ℞, ponitur enim Z ℞ minor maxima, ergo & F X quam P Q maior erit.

Le.5.et 6 Et quoniam rectangulum F A X æquale * eſt quadrato A I proportionales erunt F A A I A X, ſed F A minor eſt quam A I, ponitur enim A I maior minore rectarum A F A K, ergo & A I minor erit quam A X, & ideo F A multo minor.

36.Tertij Et quoniam rectangulum P O Q æquale * eſt quadrato L O, hoc
Le 5. et 6 eſt quadrato A I, cui quoque æquatur * & rectangulum F A X, æqualia erunt rectangula F A X P O Q, atque adeo proportionales F A P O O Q A X, ſed F X differenria extremarum oſtenſa
Lem. 10. eſt maior quam P Q differentia mediarum, ergo altera extremarum * F A A X, hoc eſt ipſa F A quæ oſtenſa eſt minor quā AX, minima erit vnde P O maior erit quam A F. Cum itaque P O maior ſit quam

A F,

A F, & minor quam A M vt demonſtrauimus, poterit à puncto A
ad circumferentiam M F ( hoc eſt ad eam circumferentiæ K F par-
tem, quæ maxima F C & puncto ſectionis intercipitur) duci recta
ipſi PO differentiæ rectarum O N N L æqualis.




Deinde ſit A F(con-
termina ſcilicet maxi-
mæ F C) maior quam
A K. Ergo, ex iuſſu Lem
matis, ſiat O P aggre-
gatum rectarum O N
N L. Ipſa igitur O P
maior erit quam L O,
hoc eſt quam A M.

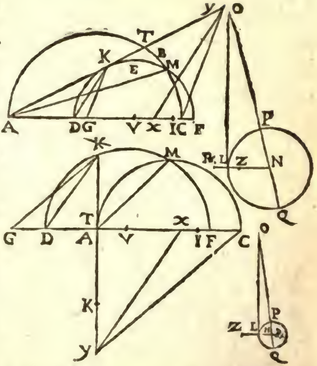
Et quoniam eſt vt
A G ad A C ita L Z
ad Z N ex cõſtructio-
ne, & ita * quoque FC *Le.5.et 6*
ad C X, erit F C ad
C X vt L Z ad Z N,
& conuertendo vt C X ad F C ita erit Z N ad Z L, & exiſtente L
inter N Z, erit diuidendo, exiſtente vero Z inter L N, erit componen
do vt F X ad F C ita L N ad L Z, hoc eſt ita P Q ad Z ℞, dupla vi-
delicet ad duplam, & rurſus conuertendo erit vt F C ad F X ita Z ℞
ad P Q, ſed F C cum ſit omnium maxima, maior eſt quam Z ℞, quæ
ex determinatione ponitur minor maxima, ergo & F X maior erit
quam P Q.

Et quoniam rectangulum F A X æquale * eſt quadrato A I, pro- *Le.5.et 6*
portionales erunt F A A I A X, ſed F A maior eſt quàm A I, po-
nitur enim A I minor maiore rectarum A F A K, ergo & A I ma-
ior erit quàm A X, & per conſequens F A multo maior.

Sed quoniam æqualia ſunt rectangula F A X P O Q, vtrunque
enim eorum æquale eſt quadrato A I, ſeu quadrato L O, propor-
tionales erunt F A P O O Q A X, ſed F X differentia extrema-
rum oſtenſa eſt maior quam P Q differentia mediarum, ergo alte-
ra extremarum * F A A X, id eſt ipſa F A, quæ oſtenſa eſt ma- *Lem. 10.*
ior quàm A X, maxima erit, per conſequens igitur P O minor
erit quàm A F. Cum itaque P O minor ſit quàm A F, & maior
quàm A M, vt eſt oſtenſum, poterit à puncto A ad circumferentiam
M F ( id eſt ad partem circumferentiæ K F quæ maxima & puncto
ſectionis intercipitur) duci recta ipſi P O aggregato rectarum O N
N L æqualis.



Digitized by Google



Sed ſit KT maior quàm FC. Ergo recta ipſi Z ℞ æqualis poterit aptari intercircumferentias MK MT tantum. Primum igitur ſit AK (contermina maximæ KT) minor quàm AF. Ergo ex iuſſu lemmatis fiat PO differentia rectarum ONNL, ea minor erit quam LO, hoc eſt quam A M.

Iam transferatur AK ad contrarias partes in ſemicirculis in quibus punctum A in baſe DF exiſtit. Quoniam igitur vt AG ad AC ita eſt LZ ad ZN ex constructio-

*Le.5.et 6* ne, & ita * quoque KT ad TY, erit KT ad TY vt LZ ad ZN, & conuertendo vt TY ad KT ita ZN ad ZL, & exiſtente Z inter LN, erit componendo, exiſtente vero L inter NZ, erit diuidendo vt YK ad KT ita LN ad LZ, hoc eſt ita PQ ad Z℞, dupla videlicet ad duplã, & rurſus conuertendo erit vt KT ad YK ità Z ℞ ad PQ, ſed KT, cum ſit maior quàm FC, & ideo omnium maxima, maior eſt quàm Z℞, ponitur enim Z ℞ minor maxima, ergo & YK maior erit quam PQ.

*Le.5.et 6* Et quoniam rectangulum YAK æquale * eſt quadrato AI, proportionales erunt AK AI YA, ſed AK minor eſt quam AI, ponitur enim AI maior minore rectarum AF AK, ergo & AI minor erit quam AY, & conſequenter AK multo minor.

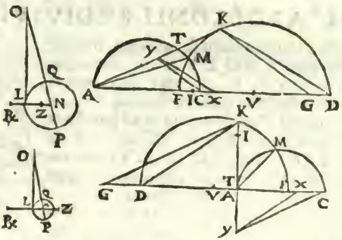
Sed quoniam rectangulum POQ æquale eſt quadrato LO, ſeu

*36.Tertij* quadrato AI, cui quoque æquale * eſt & rectangulum YAK, æqua-

*Le.5.et 6* lia erunt rectangula YAK POQ, ac proinde proportionales YA PO OQ AK, ſed YK differentia extremarum oſtenſa eſt maior

*Lem.10.* quam PQ differentia mediarum, ergo altera extremarum * YA AK, ipſa nempe AK (quam demonſtrauimus minorem eſſe quam AY) minima erit, vnde PO maior erit quam AK. Cum igitur PO maior ſit quam AK, & minor quam AM vt demonſtrauimus, poterit à puncto A ad circumferentiam MK (hoc eſt ad circumferentiæ KF partem, quæ maxima KT, & puncto ſectionis M intercipitur) duci recta ipſi PO differentiæ rectarum ONNL æqualis.

Deinde




Deinde ſit AK (conterminā maximæ KT) maior quam AF. Ergo ex iuſſu Lemmatis fiat PO aggregatum rectarum ON NL. Erit igitur PO maior quam LO, hoc eſt quam AM.

Et quoniam eſt vt AG ad AC ita LZ *Le.5.et 6* ad ZN, & ita KT ad TY, erit KT ad TY vt LZ ad ZN, & exiſtente N inter Z L, erit per conuerſionem rationis, exiſtente vero Z inter L N, erit conuertendo & componendo ac rurſus conuertendo vt KT ad YK ita ZL ad LN, hoc eſt ita Z℞ ad PQ, dupla nempè ad duplam, ſed KT oſtenſa eſt maior quàm Z℞, ergo & YK quàm PQ maior erit.

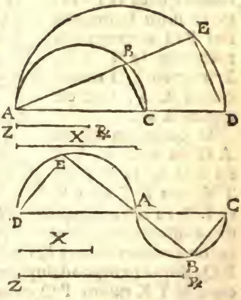
Et quoniam rectangulum YAK* æquale eſt quadrato AI, pro- *Le.5.et 6* portionales erunt AK AI YA, ſed AK maior eſt quàm AI, ponitur enim AI minor maiore rectarum AF AK, ergo & AI maior erit quàm YA, atque adeò AK mnlto maior.

Denique quoniam rectangulũ POQ æquale* eſt quadrato LO, ſeu *36. Tertij* AI, cui quoq; æquatur* & rectangulũ YAK, æqualia erunt rectāgula *Le.5.et 6* YAK POQ ideoq; proportionales YA PO OQ AK, ſed YK differentia extremarum oſtenſa eſt maior quàm PQ differentia mediarum, ergo altera extremarum* YA AK, ipſa nempè AK, (quæ oſtenſa *Lem.10.* eſt maior quàm YA) maxima erit, vnde PO minor erit, quàm AK. Cum igitur PO minor ſit quàm AK, & maior quàm AM vt eſt demonſtratum, poterit à puncto A ad circumferentiam MK, (hoc eſt ad circumferentiæ KF partem quæ maxima KT, & puncto ſectionis M intercipitur) duci recta ipſi PO aggregato rectarum ON NL æqualis. Quare conſtat propoſitum.

*Sequitur tertia, ſeu vltima pars conſtructionis Problematis.*



Digitized by Google




Sed tangentium ſe inuicem ſemicirculorum A B C D E A ſit contactus in puncto A, & oporteat inter eorum circumferētias ponere rectam lineam æqualem Z ℞ datæ, ita vt ad punctum A pertingat. Fiat vt D C ad C A ita Z ℞ ad aliam, quæ ſit X. Quoniam igitur D C maxima eſt omnium quæ ad punctum A pertingentes inter circumferentias ABC A E D interijciuntur, recta vera Z ℞ ponitur minor maxima, erit D C maior quàm Z ℞, id eſt prima quatuor proportionalium maior quàm tertia, ergo & ſecunda CA maior erit quàm X quarta. Vnde in ſemicirculo ABC poterit aptari recta linea æqualis ipſi X. Aptetur ergo, eaque ſit AB, quæ producta ſecet circumferentiam AED in E, & iungantur B C E D. Anguli igitur ABC AED in ſemicirculis recti erunt, & ideo æquales, ac proinde parallelæ B C E D; quare in prima figura, vt A C ad CD ita erit AB ad BE.

Et quoniam eſt vt D C ad C A ita Z ℞ ad X ex conſtructione, erit conuertendo vt A C ad CD ita X hoc eſt A B ad Z ℞, ſed vt A C ad CD ita oſtenſa eſt AB ad B E, ergo B E æqualis erit Z ℞.

In ſecunda vero Figura, cum ſint æquales anguli A B C A E D, vt demonſtrauimus, & æquales quoque anguli ad A qui ſunt ad verticem, ſimilia erunt triangula ABC A E D. Vt igitur D A ad A C ita erit E A ad AB, & componendo vt D C ad CA ita EB ad BA, hoc eſt ad X, ſed vt D C ad C A ita eſt quoque Z ℞ ad X ex conſtructione, ergo E B æqualis erit Z ℞ datæ. Poſita eſt igitur inter circumferentias ſemicirculorum A B C D E A recta linea E B, eaque ad punctum A pertingit, quod erat faciendum.

F I N I S.

Pag.5. lin.vlt. A H ſcribe A K
Pag.6. lin.10. ad A G ſcribe ad A C
Pag.7. lin.24. Aequæ ſcribe Aequè
Pag.9. lin.13. ita etit ſcribe erit
Pag.11. figuræ Lemmatis VIII. poſitę ſunt præpoſtero ordine. Itaque ea quæ poſterior eſt intelligatur prior.
Pag.12. lin.26. & F D ſcribe & F B
Pag.19. lin.5.& conſequenter maior ſcribe minor
Pag.21. lin.19. & AF minor ſcribe maior
Pag.ead.lin.20. A S, minor ſcribe A Q, maior
Pag.& lin.ead.multo minor ſcribe multo maior
Pag.30. in quarta figura littera S quæ eſt in linea TA producta ſcribenda eſt Y
Pag.32. lin.24. ſitque ſcribe ſintque
Pag.39. lin.23. minor * quam ſcribe minor quam
Pag.41. lin.17. & per conſequens maior ſcribe minor
Pag.ead.lin.24. quam A E ſcribe A F
Pag.ead.lin.26. & A F minor erit quam A S & A E multo minor,atque minor & A N ſcribe & A F maior erit quam A Q, & A E multo maior, atque maior & A N
Pag.ead.lin.36.quam E A ſcribe quam ea
Pag.ead.lin.39. A F AK ſcribe A F A K vt in ſequentibus figuris
Pag.42. lin.32. S E ad E B ſcribe ità SE ad E B
Pag.43. lin.27. qnam A K ſcribe A Q
Pag.ead.lin.37. Aequę ſcribe Aequè
Pag.45. lin.12. æqualis A N ſcribe A H
In quinta figura Lemmatis XX littera K infera fiat R
Similiter in quinta figura earum quæ reſpiciunt pag.46. littera K infera fiat R
Pag.50.lin.penult. ANQ ſcribe NAQ
Pag.51. lin.6. vt E B B S ſcribe vt E B ad B S
Pag.52. lin.vlt. in N ſcribe in H
Pag.53. lin.5. L G ſcribe L b
In figuris ad primam & ſecundam partem Lemmatis XXI. pertinentibus in quibus geminata eſt linea AK, dele eam quæ eſt extra ſemicirculum D E F & cęſuram litterę K rade
Pag.60. lin.19. Aequæ ſcribe Aequè
Pag.72. lin.23. ernnt ſcribe erunt
Inter pag.74. & 75. in figuris ad ſecundam partem Problematis pertinentibus in quibus punctum A exiſtit in baſe ſemicirculi D F deeſt littera T excepto in figura ſeptima. Itaque ſcribe eam iuxta litteram A vt punctum T idem ſit quod A prout eſt in figura ſeptima.
Pag.79. in figuris in quibus punctum A exiſtit in baſe D F ſcribe litteram T vbi deeſt ita vt punctum T idem ſit quod punctum A.
Pag.80. in linea A K figuræ primæ vbi ſecat ſemicirculum A C ſcribe litteram T
Pag.ead. in linea K A producta ſecundæ figuræ ſcribe litteram Y quia deeſt
Pag.ead. lin. antepenult. quam A F ſcribe A Y
Pag.82. litteram K quæ eſt in circumferentia D E F figuræ ſecundæ incide, prout inciſæ ſunt & aliæ ſubtus
Pag.84. lin.34. F A X ſcribe F A A X
Pag.91. in ſecunda figura trāſfer lineam A K ad contrarias partes, & litteram K quæ eſt incircumferentia D E F incide
Pag.ead.lin.22. mnlto ſcribe multo



Digitized by Google

[illegible]

Digitized by Google